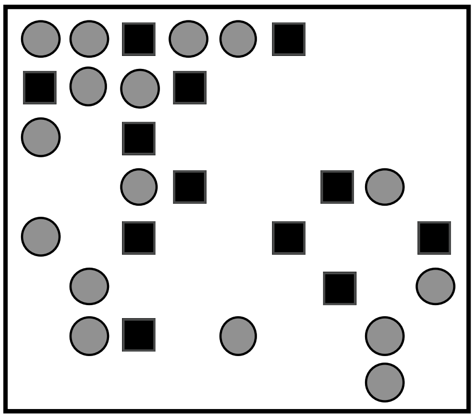
No	titre	3	4	5	6	7	8	9	10	Ar.	Alg.	Ge.	Lo.	Orig.
1	Les bons chocolats	3								x		x		PR
2	Le mage Belcolor	3	4							xx				GE
3	Les petites voitures	3	4	5									x	PG
4	Carrelage en « L »	3	4	5						x		x		RZ
5	Les deux lettres	3	4	5								xx		BL
6	Les problèmes du Rallye		4	5	6					x			x	BB
7	Pas de gaspillage		4	5	6					x		x		BB
8	Le défi			5	6					xx				CI
9	Le billard			5	6							xx		AO+PR
10	Jetons numériques				6	7				xx				RZ+CI
11	Ping-pong				6	7				x			x	FC
12	L'insomniaque				6	7	8			xx				SI
13	Les deux échelles					7	8	9	10	x				SS+CI
14	D'un enclos à l'autre					7	8	9	10	x	x	xx		SI+PR
15	Drôle de multiplication					7	8	9	10	xx			x	ISR
16	Pile ou face					7	8	9	10				xx	FC
17	La boîte à chapeaux						8	9	10			xx		PR
18	Problème de citernes						8	9	10	xx	x			LU+CI
19	Le jeu de Franc-Carreau							9	10			xx	x	FC

1. LES BONS CHOCOLATS (Cat. 3)



Les chocolats de cette boîte étaient disposés régulièrement quand elle était pleine :

- dans la première ligne, deux chocolats au lait, ronds, étaient suivis d'un pavé de chocolat noir, puis de deux ronds, puis d'un pavé, puis de deux ronds ...
- la ligne suivante commençait par un pavé suivi de deux ronds, puis d'un pavé, ...
- la troisième ligne était comme la première ligne, la quatrième comme la deuxième, et ainsi de suite.

Certains chocolats ont déjà été mangés et il n'en reste que 28.

Combien de chocolats au lait, ronds, ont déjà été mangés?

Et combien de pavés de chocolat noir ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : disposition régulière d'objets, alignements
- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication

Analyse de la tâche

- Comprendre la disposition des chocolats selon le texte ou le dessin : repérer les alignements horizontaux et/ou verticaux et leurs régularités.
- Dessiner les chocolats qui manquent, selon les régularités découvertes et dénombrer les chocolats de chaque type: 32 ronds et 12 carrés.

Ou: compter le nombre de lignes (8) et remarquer que dans chacune d'entre elles il y a 6 ronds et 3 carrés .Calculer alors les nombres initiaux de chocolats de chaque type: 6 x 8 = 48 ronds et 3 x 8 = 24 carrés. Finalement compter les chocolats restants de chaque type et les soustraire aux nombres initiaux, pour les ronds : 48 – 16 = 32, pour les carrés; 24 – 12 = 12.

Attribution des points

4 Réponses exactes (32 et 12) avec justification claire (dessin complet ou calculs détaillés)

3 Réponses exactes avec dessin peu clair ou calculs incomplets
ou une erreur de comptage avec dessin complet correct ou une erreur de calcul avec le détail des opérations

2 Réponses exactes sans aucun dessin ni calcul
ou deux erreurs de comptage ou de calcul sur la base d'un dessin complet correct ou de calculs détaillés

1 Une seule réponse correcte, sans dessin ni calcul
ou début de recherche correct

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3

Origine : Parma

2. LA MAGE BELCOLOR (Cat. 3, 4)

Il était une fois un mage appelé Belcolor. Il s'habillait en jaune le lundi et le jeudi, en bleu le dimanche et en rouge les autres jours de la semaine.

Il y a quelques années, il portait un habit bleu le 3 mai.

Combien de jours Belcolor s'est-il habillé en jaune, et combien de jours s'est-il habillé en rouge durant le mois de mai de cette année-là ?

(Souvenez-vous que le mois de mai a 31 jours)

Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : connaissances élémentaires des nombres, périodicité d'une suite

Analyse de la tâche

- Comprendre que le 3 mai est un dimanche et que cette donnée est fondamentale pour reconstruire le calendrier de ce mois de 31 jours.
- Éliminer tous les dimanches (il y en a 5) en comptant : le 3, le 10 (3 + 7), le 17, le 24 et le 31.
- Compter tous les lundis et jeudis (4+4=8), procéder de même au comptage des mardis et mercredis (4+4=8) puis à ceux du vendredi et du samedi en prenant aussi en compte les deux jours précédant le 3 (4+4+2 =10) ; ou soustraire de 31 les dimanches, lundis et jeudis déjà comptés (5 + 8= 13 ; 31 – 13 = 18) et conclure que le mage est 8 jours en jaune et 18 jours en rouge.

Ou : construire le calendrier de ce mois de mai et y compter les jours correspondant à chaque couleur.

Attribution des points

4 Réponses exactes (8 en jaune - 18 en rouge) avec explications

3 Réponses exactes sans explication
ou les deux réponses dont une seule est correcte (erreur de comptage dans l'autre), avec explications

2 Mise en place correcte du comptage mais avec une erreur sur les jours du mois
ou les deux réponses dont une seule est correcte (erreur de comptage dans l'autre), sans explication

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Genova

3. LES PETITES VOITURES (Cat. 3, 4, 5)

Luc a cinq petites voitures, une bleue, une grise, une jaune, une rouge et une verte. Il les place dans son garage, les unes à côté des autres. Il voit que :

- la grise est à côté de la verte,
- il y a deux voitures entre la rouge et la bleue,
- la rouge n'est pas à une extrémité,
- la jaune est à gauche de la grise, mais entre elles, il y a une autre voiture.

Dessinez la disposition des voitures.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Logique : capacité de contrôler simultanément une série d'indications et de procéder par déductions successives

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de disposer les voitures sur cinq emplacements en respectant les consignes, mais qu'aucune de ces consignes ne détermine univoquement la place d'une des voitures et qu'il s'agira de tenir compte de plusieurs consignes à la fois.
- Comprendre que la deuxième et la troisième indications sont les plus efficaces et ne laissent que deux choix : B – – R – et – R – – B.
- Comme il y a deux places entre la rouge et la bleue (et une place à l'extérieur) ces deux places sont forcément réservées aux deux voitures qui sont l'une à côté de l'autre : la grise et la verte.
- La dernière consigne indique que la jaune est à l'extrême gauche, à côté de la rouge et que la grise est aussi à côté de la rouge. On arrive ainsi à la disposition : Jaune-Rouge-Grise-Verte-Bleue
- Vérifier que la disposition obtenue respecte les informations données.

Ou :

- placer la jaune et la grise : J – G et en déduire les 3 possibilités : – – J – G ; – J – G – et J – G – –,
- puis, B – J R G ou J R G – B (infos 2 et 3),
- enfin : J R G V B (info 1).

Ou : placer les voitures par essais successifs et corrections, par lecture des consignes, pour parvenir à la disposition cherchée, mais sans se rendre compte de l'unicité.

Attribution des points

4 Réponse exacte « Jaune-Rouge-Grise-Verte-Bleue » donnée par le dessin et explications, (ordre suivi pour disposer les voitures)

3 Réponse exacte donnée par le dessin sans explication ou simplement avec la répétition des consignes

2 Solution qui ne respecte pas une condition, mais qui tient compte de toutes les autres, en particulier l'ordre inverse – « Bleue-Verte-Grise-Rouge-Jaune »

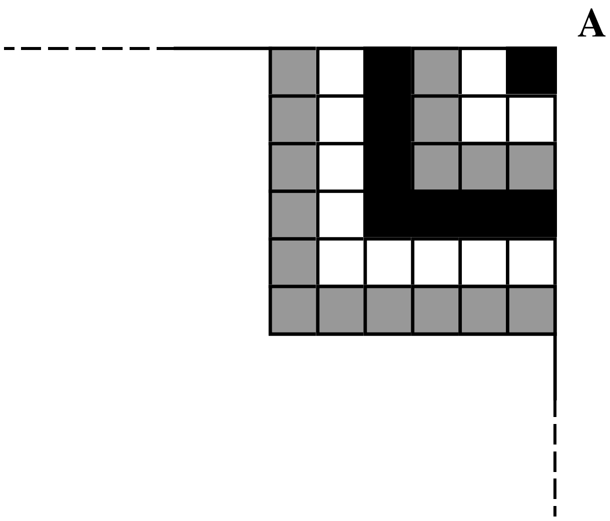
1 Début de recherche ou solution qui ne respecte pas deux conditions.

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3, 4, 5

Origine : Perugia

4. CARRELAGE EN « L » (Cat. 3, 4, 5)



La chambre de Rita est carrée. Elle veut y poser un carrelage. Elle souhaite utiliser des carreaux carrés de trois couleurs différentes.

Elle commence par disposer les carreaux comme sur le dessin (qui représente le début du carrelage) :

Elle place d'abord un carreau noir dans un des coins de sa chambre, le coin A.
- Elle entoure ce carreau noir avec des carrés blancs.
- Elle dispose alors un autre rang en forme de « L » avec des carreaux gris.
- Elle décide ensuite de continuer avec la même régularité, pour arriver à 20 carreaux par côté, achevant ainsi de carreler toute sa chambre.

Combien de carreaux de chaque couleur doit-elle utiliser pour le carrelage de toute sa chambre ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : comptage ; addition ; reconnaissance de suites numériques
- Géométrie : carré ; reconnaissance de lignes et colonnes ; découverte de relations et régularités

Analyse de la tâche

- Observer dans la figure la disposition des diverses couleurs et déterminer les critères de succession permettant, à chaque fois qu'on ajoute un rang de carreaux en « L », de former des carrés de plus en plus grands jusqu'à arriver à celui du carrelage complet de (20 x 20).
- Trouver le nombre total des carreaux de chaque couleur en dessinant le carrelage et par comptage.

Ou : découvrir que, à partir du premier carreau, les autres sont disposés selon une suite de nombres impairs :

Noir	Blanc	Gris	
1	3	5	+2
7	9	11	⇨
13	15	17	
19	21	23	⇩ +6
25	27	29	
31	33	35	
37	39		

Ou : noter que la séquence des nombres de carreaux pour chaque couleur peut être déterminée de la première ligne ou de la première colonne, en observant trois types de régularités : le « L » :

on trouve les noirs à partir de A (position 1) de 3 en 3 rangs, les blancs et les gris vont aussi de 3 en 3 rangs, en partant respectivement de la 2e et de la 3e case. (positions 2 et 3). Les carreaux de chaque rang en « L » peuvent être comptés verticalement et horizontalement (sans compter deux fois celui de l'angle). Ces nombres progressent ainsi, selon le tableau suivant :

Position	nb. carreaux en verticale	nb. carreaux restant horizontalement.
1	1	0
2	2	1
3	3	2
4	4	3
…	…	…

le calcul peut ainsi se faire, couleur par couleur :

Noir : **1 +** (**4** + 3) + (**7** + 6) + (**10** + 9) + (**13** + 12) +(**16** + 15) + **19** + 18 = 133

Blanc : (**2** + 1) + (**5** + 4) + (**8** + 7) + (**11** + 10) + (**14** + 13) + (**17** + 16) + **20** + 19 = 147

Gris : (**3** + 2) + (**6** + 5) + (**9** + 8) + (**12** + 11) + (**15** + 14) + **18** + 17 = 120

Attribution des points

4 Réponse correcte (N = 133 ; B = 147 ; G = 120) avec explications ou avec dessin adéquat

3 Réponse correcte avec explications ou dessin peu clair
ou réponse complète avec une erreur dans le comptage ou le calcul, mais avec explications ou avec dessin adéquat

2 Réponse incomplète avec compréhension de la succession des couleurs des carreaux et comptage correct pour une seule couleur
ou réponse correcte sans explication ni calcul ni dessin
ou réponse complète avec deux erreurs dans le comptage mais avec explications ou avec dessin adéquat

1 Début correct de recherche, avec explicitation de la succession correcte des couleurs des carreaux mais sans comptage

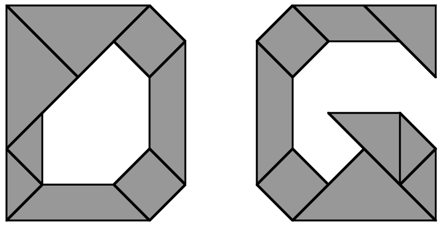
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Rozzano et Parma

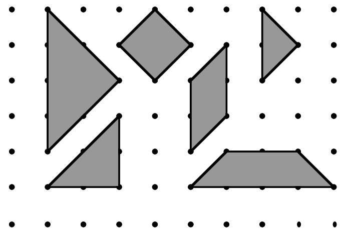
5. LES DEUX LETTRES (Cat. 3, 4, 5)

Danielle et Gabrielle ont marqué la première lettre de leur nom sur leur cahier en y collant des triangles, des carrés et d'autres figures.



Voici les deux lettres D et G qu'elles ont obtenues :

Toutes les figures qu'elles ont utilisées ont été découpées dans du papier à points, selon ces six modèles :



Qui a utilisé le plus de papier à points pour composer la première lettre de son nom ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : calcul de l'aire d'une figure géométrique en choisissant une unité de mesure commune

Analyse de la tâche

- Observer les deux lettres D et G et vérifier qu'elles sont bien composées des six figures modèles.
- Comprendre que, pour comparer la quantité de papier utilisé, il s'agit de comparer les aires des figures et non leur nombre ou leur périmètre et, par conséquent, qu'il faut soit chercher une unité de mesure d'aire commune, soit travailler par compensations ou par superpositions.
- Constater que les six figures modèles (dont il n'est pas nécessaire de connaître les noms) peuvent se décomposer en petits triangles : 2 pour le carré, le parallélogramme, le triangle moyen, 3 pour le trapèze et 4 pour le grand triangle. Compter alors les unités dans les deux lettres et obtenir 20 pour D et 19 pour G. (Le comptage peut s'effectuer par additions des aires de chaque figure ou par dessin préalable des petits triangles sur chaque figure et par comptage un à un).

  Pour simplifier le comptage, il est aussi possible de retirer les pièces égales qui figurent dans les deux lettres : un grand triangle, deux carrés, un trapèze, deux petits triangles et ne comparer que l'aire des pièces restantes.

Ou : découper les pièces de chaque figure et les disposer en « puzzle » plus compacts pour pouvoir les superposer et constater que celui de D a un petit triangle de plus que celui de G.

Ou : découper une figure (G) et avec les pièces essayer de recouvrir D

Attribution des points

4 Réponse correcte : «Danielle a utilisé plus de papier » avec une explication claire reposant sur une comparaison des aires avec le nombre d'unités (20 et 19 petits triangles) ou sur de compensations ou par superpositions

3 Réponse correcte, avec des explications incomplètes mais qui témoignent d'une bonne compréhension du problème

2 Réponse correcte, avec seulement une esquisse d'explication (par exemple : « on a compté » ou « on les a mises l'une sur l'autre, ...

ou réponse erronée, mais avec des explications qui font apparaître une procédure correcte où il y a une erreur de calcul

1 Réponse : «Danielle», qui pourrait être donnée au hasard, sans aucune explication

ou début de recherche cohérent

0 Réponse : « Gabrielle utilise le plus de papier » qui se réfère au nombre de pièces : 9, contre 8 pour Danielle

ou réponse fondée sur la mesure du périmètre de la figure, ou incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : C.I.

6. LES PROBLÈMES DU RALLYE (Cat. 4, 5, 6)

Un groupe de professeurs prépare les problèmes du prochain rallye pour les élèves des catégories 3, 4 et 5. Ils ont décidé qu'il y aurait 5 problèmes pour la catégorie 3, 6 problèmes pour la catégorie 4 et 7 problèmes pour la catégorie 5.

Certains problèmes concerneront plusieurs catégories :

- 1 problème sera commun seulement aux catégories 3 et 4,
- 3 problèmes seront communs seulement aux catégories 4 et 5,
- 2 problèmes seront communs aux trois catégories,
- 2 problèmes ne seront proposés que pour la catégorie 5.

Combien de problèmes le groupe de professeurs doit-il préparer ?

Expliquez votre démarche pour trouver la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et soustraction
- Logique :organisation d'un raisonnement prenant en compte plusieurs conditions simultanément

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre total de problèmes n'est pas égal à 18 (c'est-à-dire à la somme des nombres de problèmes pour chaque catégorie).
- Mettre en place une démarche de résolution.
- Considérer qu'il y a **5** problèmes pour la catégorie 3, **3** problèmes pour la catégorie 4 qui ne sont pas déjà dans la catégorie 3 (6 – 3 = 3), **2** problèmes pour la catégorie 5 qui ne sont pas déjà dans les catégories précédentes (7 – 3 – 2 = 2). Ce qui fait un total de **10** problèmes (5 + 3 + 2 = 10).

Ou : Considérer que des 18 problèmes, il faut enlever 2 fois ceux qui concernent les 3 catégories (donc moins 4) et une fois ceux qui concernent 2 catégories (donc encore moins 4). Il y a donc 10 problèmes ; ou, des 18 problèmes, enlever les 6 de la catégorie 4 parce qu'ils sont communs aux autres catégories et 2 problèmes communs aux catégories 3 et 5.

Ou : Procéder par essais en écrivant la liste des problèmes numérotés à partir de 1, en leur attribuant des catégories et en vérifiant si les contraintes sont bien respectées.

Ou : utiliser une représentation du type suivant, en respectant les contraintes :

Catégorie 3	X1	X2	X3	X4	X5					
Catégorie 4			X3	X4	X5	X6	X7	X8		
Catégorie 5				X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10

Ou : Utiliser un schéma de type ensembliste.

Attribution des points

4 Réponse correcte (10) avec explication de la démarche ou schéma commenté (le détail des problèmes par catégorie)

3 Réponse correcte avec explication partielle ou peu claire

2 Réponse correcte sans aucune explication
ou, réponse erronée avec une des sept données non respectée, mais avec explications

1 Réponse erronée avec deux ou trois données non respectées

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

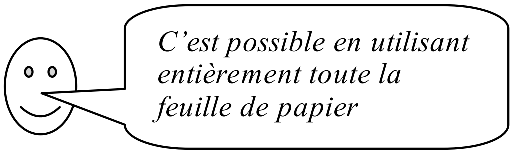
Origine : Bourg-en-Bresse

7. PAS DE GASPILLAGE (Cat. 4, 5, 6)

La maman de Sophie a acheté une feuille de papier de 24 cm sur 34 cm.

Elle veut y découper le plus possible d'étiquettes rectangulaires de 6 cm de large sur 8 cm de long.

Sophie :



Sophie a-t-elle raison ? Combien d'étiquettes sa maman peut-elle découper dans la feuille qu'elle a achetée ?

Dessinez un découpage possible avec les détails des dimensions.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiples, addition
- Géométrie : mesure : rectangle

Analyse de la tâche

- Comprendre que tout le papier doit être utilisé
- Penser à s'aider d'un schéma du rectangle initial.
- Remarquer que 24 est multiple de 6 et de 8 et qu'il est donc possible de découper entièrement la largeur en un nombre entier de fois 6 cm ou 8 cm, mais sans pouvoir combiner les deux dimensions.

À partir de là, essayer en découpant d'abord des bandes de 8 cm sur la longueur et 6 cm sur la largeur, pour arriver à un rectangle de 24 sur 18 cm (Fig. 1)

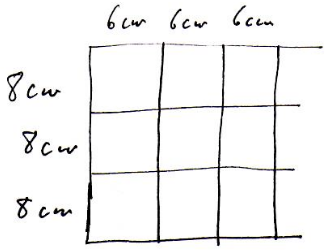


Fig. 1

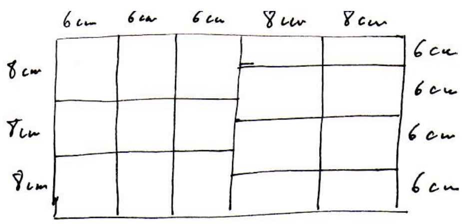


Fig. 2

-Se demander ensuite combien de fois on peut reporter 6 cm sur la longueur du rectangle de façon à avoir la possibilité de compléter avec un multiple de 8 cm. La seule possibilité est 2 fois, ce qui conduit à 3 x 6 cm + 2 x 8 cm. Le nombre des étiquettes devient ainsi 9 + 8 = 17 (Fig. 2). Remarquer qu'en commençant par 4 étiquettes de 6 cm sur la largeur on arriverait au même résultat.

Ou : mettre en place une démarche par essais, en reportant des dimensions sur un schéma ou un dessin à l'échelle.

Ou : découper des étiquettes et procéder par essais de pavage.

Attribution des points

4 Réponse correcte (17 étiquettes – avec ou sans le « oui ») avec schéma correct et détaillé

3 Réponse correcte avec schéma mais sans détail des dimensions

2 Réponse erronée (16 étiquettes) avec seulement des étiquettes réalisées avec 6 cm découpée sur la largeur de la feuille

1 Réponse erronée (moins de 16) avec seulement des étiquettes réalisées avec 8 cm découpée sur la largeur de la feuille
ou autre réponse erronée avec un schéma respectant les dimensions des étiquettes
ou réponse 17 trouvée par un calcul d'aire : (24 x 34) : (6 x 8), sans dessin

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Bourg-en-Bresse

8. LE DÉFI (Cat. 5, 6)

Paul, Marie et Luc écrivent des additions en utilisant, pour chacune d'elle, une fois et une seule chacun des six chiffres : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Les trois amis se lancent un défi : ils cherchent à obtenir, par une de ces additions, le plus grand nombre inférieur à 100.

Paul a obtenu 39 : **6 + 5 + 23 + 4 + 1**.

Marie a obtenu 97, mais ce n'est pas valable car elle n'utilise pas le « 5 » : **64 + 32 + 1**.

Luc a obtenu 95, mais ce n'est pas valable car il a utilisé deux fois le « 2 » : **22 + 56 + 14 + 3**.

Trouvez le plus grand nombre inférieur à 100, qui est le résultat d'une addition écrite avec les six chiffres 1, 2, 3, 4, 5, et 6, pris chacun une seule fois.

Indiquez tous vos calculs pour expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition/soustraction (propriétés et écriture de sommes), numération (dizaines et unités)

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé, vérifier les exemples et prendre en compte le but et les contraintes.
- Comprendre que pour trouver l'addition donnant le plus grand nombre inférieur à 100, il faut utiliser des nombres de deux chiffres et de un chiffre et travailler par essais organisés en choisissant les dizaines de manière opportune :

  par exemple, la somme des trois nombres formés par les trois couples de chiffres : 12 + 34 + 56 = 102 **est trop grande** ; en conservant les deux « grands nombres » 34 e 56 on obtient : 1 + 2 + 34 + 56 = 93 qui respecte les contraintes, mais est-ce vraiment le plus grand ?
- Comprendre qu'on peut former d'autres nombres de deux chiffres avec des combinaisons différentes :

  par exemple :13 + 24 + 65 = 110 **trop grand**, mais 1 + 3 + 24 + 65 = 93 ! Et encore 13 + 2 + 4 + 65 = 84 (dans le passage de 1 + 3 à 13 il y a 9 unités en plus, mais dans le passage de 24 à 2 + 4, il y a 18 unités en moins) ou, toujours avec 65, 14 + 23 + 65 = 102 **trop grand.**

  ou : 14 + 23 + 56 = 93 ! ou encore : 15 + 23 + 46 = 84 **trop petit ;** et rien ne change si l'on utilise une unité de plus dans le premier nombre et une de moins dans le troisième : 16 + 23 + 45 = 84

  ou encore : 12 + 45 + 36 = 93 ! ou : 12 + 54 + 36 = 102 (en fait, en passant de 45 à 54, on augmente de 9 unités)
- La liste (la plus exhaustive) des combinaisons possibles conduit toujours à 21, 30, … 75, 84, 93, 102 … (Il est éventuellement possible de comprendre à ce moment que chaque changement de position des chiffres augmente ou diminue la somme de 9 ou d'un de ses multiples). Le plus grand nombre inférieur à 100 est donc 93.

Attribution des points

4 La réponse correcte (93), avec détails des calculs qui montrent que « 93 » est le plus grand nombre possible inférieur à cent (parmi ... 75, 84, 93, 102)

3 La réponse correcte, (93) sans le détail des calculs, mais avec une addition correspondante

2 La réponse correcte (93) sans autre détail
ou seulement une addition correcte qui donne la réponse 84, comme plus grand nombre

1 Une addition correcte qui donne une somme inférieure à 84
ou la réponse 102

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 5, 6

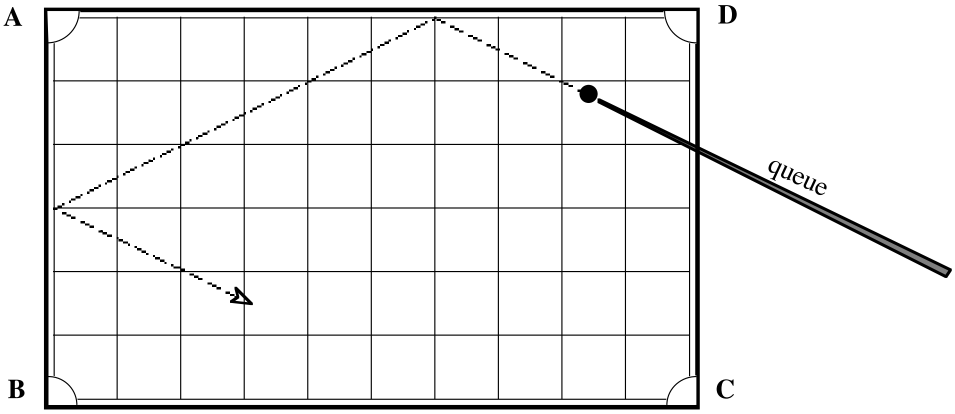
Origine : C.I.

9. LE BILLARD (Cat. 5, 6)

Ernest joue au billard. Le dessin représente la position de sa boule. Il désire la faire entrer dans un des trous (A, B, C, ou D) et la pousse avec force d'un coup de queue.

La boule, quand elle rencontre un bord du billard, rebondit comme l'indique le dessin.

La boule d'Ernest, après avoir rebondi quelques fois contre les bords du billard, entre dans un des trous.



Complétez le parcours de la boule d'Ernest.

Dans quel trou est-elle entrée ? Combien de fois a-t-elle touché les bords ?

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

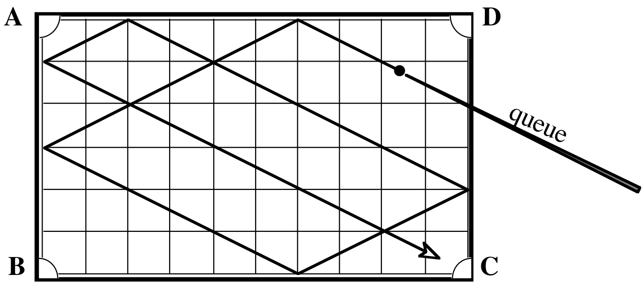
- Géométrie : angles égaux et symétrie axiale

Analyse de la tâche

- Observer le dessin ou savoir que la trajectoire de la bille qui rebondit contre les bords forme des angles égaux avec la bande (ou avec la perpendiculaire à la bande).

Ou : comprendre avec le dessin que la bille se déplace toujours suivant la diagonale d'un double-carré ; construire de proche en proche la trajectoire en utilisant cette observation induite par le dessin (donc sans faire explicitement référence à la loi de la réflexion sur les bords).

- Prolonger la trajectoire de la bille jusqu'au côté BC.
- Trouver les positions successives en appliquant plusieurs fois la même règle, selon le quadrillage ou en pliant la feuille ou encore en observant le parallélisme des segments de trajectoire.
- Trouver que, après un dernier rebond contre les bandes, la bille entre dans le trou C.



Attribution des points

4 Réponse correcte : (trou C, 6 rebonds et dessin correct)

3 Dessin correct, réponse « trou C », mais erreur dans le comptage des rebonds (5 ou 7)

2 Dessin avec une ou deux erreurs mais avec le trou et le nombre de rebonds cohérents

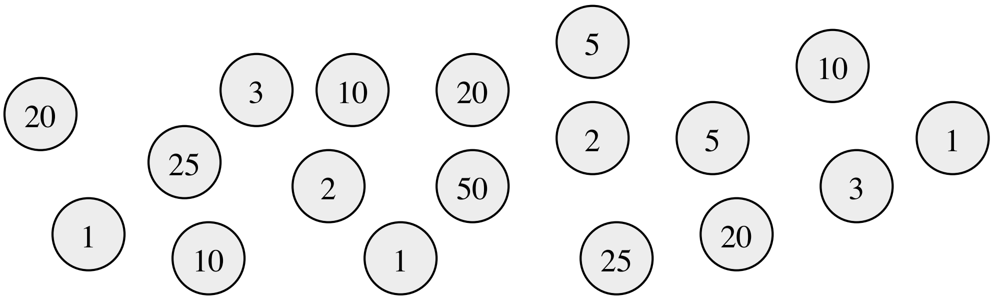
1 Début de dessin correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Valle d'Aosta et Parma

10. JETONS NUMÉRIQUES (Cat. 6, 7)



Paul, André et Jean se sont partagé ces 18 jetons de la manière suivante:

- chacun a pris le même nombre de jetons,
- chacun a obtenu la même somme en additionnant les nombres de ses jetons,
- en additionnant les nombres de deux de ses jetons, Paul obtient 22,
- André a pris un des jetons sur lequel est écrit le nombre 3.

Qui a le jeton sur lequel est écrit 50 ?

Qui a pris l'autre jeton sur lequel est écrit 3 ?

Justifiez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et décomposition en termes de même somme
- Logique : organisation et analyse d'informations

Analyse de la tâche

- Après avoir vérifié qu'il y a bien 18 jetons, calculer la somme des nombres (213) et la diviser par 3 pour trouver la somme (71 = 213 : 3) obtenue par chacun et organiser les 18 nombres donnés pour trouver comment on peut obtenir 71 comme somme de six d'entre eux :

  50, 25, 25, 20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, 5, 3, 3, 2, 2. 1, 1, 1.
- Constater qu'il n'y a qu'une seule somme dont 50 est l'un des six termes (25 ou 20 sont trop grands, il faut un terme 10 et un seul, un terme 5 et un seul, ...), la décomposition (I) : 50 + 10 + 5 + 3 + 2 + 1, qui pourrait être celle d'André car elle contient un terme 3.

  Avec les nombres qui restent, constater qu'il n'y a plus que deux décompositions de 71 (les deux 25 ne peuvent être pris ensemble, avec 25 il faut un 20 et un seul, ...) :

  décomposition (II) : 25 + 20 + 20 + 3 + 2 + 1) décomposition (III) : 25 + 20 + 10 + 10 + 5 + 1.

  En conclure que les jetons de Paul sont ceux de la décomposition (II) car ce sont les seuls où l'on trouve une somme partielle de deux termes valant 22 (20 + 2). Donner la réponse : c'est André qui a le jeton 50 (et l'un des 3) et Paul qui a l'autre jeton sur lequel est écrit le nombre 3.

Ou : Voir que Paul, ayant 22 avec les deux seuls jetons qui le permettent : 2 et 20, il doit avoir 49 avec ses quatre autres jetons. Constater alors qu'il n'y a qu'une façon d'obtenir 49 avec quatre des autres jetons (50 est exclu ainsi que les deux 25, les deux 20 ne conviennent pas, il faut un 25 et un 20, ...) ce qui conduit à la décomposition déjà rencontrée (II) : **20** + **2** + 25 + 20 + 3 + 1. On sait ainsi que, André ayant pris un jeton 3, c'est Paul qui a l'autre.

Chercher ensuite la décomposition avec le terme 50 comme précédemment (I), constater qu'elle contient l'autre 3 et que c'est donc celle d'André.

Ou : Calculer qu'il faut encore 68 points à André, en cinq jetons (un des 3 étant déjà pris). Découvrir les quatre décompositions correspondantes : 50 + 10 + 5 + 2 + 1 ; 25 + 25 + 10 + 5 + 3 ; 25 + 20 + 20 + 2 + 1 ; 25 + 20 + 10 + 10 + 3 ; 20 + 20 + 20 + 5 + 3 et constater que, si l'on choisit l'une des trois dernières (celles qui ne contiennent pas 50) il n'est plus possible de répartir les 12 jetons qui restent en deux groupes dont la somme est 71 (Car, comme nous l'avons vu précédemment, il n'y a qu'une seule décomposition (I) qui contient 50).

Continuer comme précédemment.

Attribution des points

4 Réponses correctes (André a le 50 et Paul a l'autre 3) avec justification complète : unicité des trois séries de termes dont la somme est 71

3 Réponses correctes et détermination des points qui constituent les jetons de Paul et d'André, sans autre justification

2 Une seule réponse correcte avec justifications

1 Réponses correctes sans aucune justification
ou début de recherche avec au moins le calcul du nombre de points réalisé par chacun (71)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7

Origine : Rozzano et Parma

11. PING-PONG (Cat. 6, 7)

Annie, Béatrice et Chantal ont passé leur après-midi à jouer au ping-pong. Chacune fait le compte des parties qu'elle a jouées. Voici leur conversation :

- Annie : « moi, j'ai joué 7 parties en tout ».
- Béatrice : « et moi, 5 parties ».
- Chantal : « tiens, moi aussi, j'ai joué 5 parties ».
- Mais Béatrice répond : « Chantal, je ne suis pas d'accord, selon moi, tu as joué 6 parties en tout ».

Annie et Béatrice ont bien compté les parties qu'elles ont joué.

D'après vous Chantal a-t-elle joué 5 ou 6 parties ?

Combien de parties chacune a-t-elle joué contre chacune des autres ?

Justifiez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : parité, parité de la somme de deux nombres.
- Logique : tiers exclu et raisonnement par l'absurde.

Analyse de la tâche

- Voir que le nombre total de parties jouées par les trois filles est pair, puisque à chaque rencontre, deux joueuses jouent une partie.
- Puisque que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair, et que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire, voir la contradiction dans le compte de Chantal : si elle n'avait joué que 5 parties, les trois filles auraient joué au total 17 parties, soit un nombre impair, ce qui est impossible. Chantal a donc joué 6 parties et il y a donc 18 parties jouées en tout.
- Organiser la recherche pour comprendre contre qui chaque amie a joué : partir par exemple d'Annie, qui en a joué 7 et faire des hypothèses :

  si elle en avait joué 1 contre B, elle en aurait 6 contre C et B n'aurait qu'une une seule partie : ne convient pas,
  si elle en avait joué 2 contre B, elle en aurait 5 contre C et B aurait 3 partie en tout : ne convient pas,
  si elle en avait joué 3 contre B, elle en aurait 4 contre C et B aurait encore 2 parties contre C, les comptes jouent,
  si elle en avait joué 4 contre B, elle en aurait 3 contre C et B aurait 1 partie contre C : ne convient pas pour C,
  si elle en avait joué 5 contre B, elle en aurait 2 contre C : ne convient pas pour C qui n'aurait que 2 parties,

La solution est donc : C contre B : 2 parties ; C contre A : 4 parties ; A contre B : 3 parties.

Ou : s'aider d'un tableau pour dresser l'inventaire des parties :

Attribution des points

4 Réponses correctes (Chantal a joué 6 parties : C-B : 2 parties, C-A : 4 parties et A-B : 3 parties), avec raisonnement complet

3 Réponses correctes avec explications partielles, ou peu claires

2 Réponse « C a joué 6 parties », avec explications
ou toutes les réponses correctes, sans explications

1 Réponse « C a joué 6 parties », avec début de raisonnement

0 Réponse « 6 » seulement ou incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7

Origine : Franche-Comté

12. L'INSOMNIAQUE (Cat. 6, 7, 8)

Le grand-père de Julie souffre d'insomnie. Au lieu de « compter les moutons », il a mis au point un système original pour s'endormir : il compte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … en tapant sur le bord du lit avec les doigts de la main droite dans cet ordre : « pouce, index, majeur, annulaire, auriculaire, annulaire, majeur, index, pouce, index, majeur… »

Quel doigt correspondra au nombre 152 ? Et lequel correspondra au nombre 3251 ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : régularité de la numération, suites de nombres pairs et impairs, classes de reste.

Analyse de la tâche

- Comprendre la façon avec laquelle le grand-père compte sur ses doigts.
- Se rendre compte que, si l'on part du pouce, celui-ci revient tous les 8 coups et indiquera donc les nombres 1, 9, 17, 25 ... qui sont tous des multiples de 8 augmentés de 1. Pour trouver le doigt correspondant au nombre 152, on peut s'en approcher, par exemple, en repérant 160 + 1 = 161 (pouce), en revenant vers l'arrière de 8, pour 153 et trouver alors que **152** est donné par l'**index.**
- pour 3251, parmi les multiples de 8 augmentés de 1 proches de 3251, il y a par exemple 3201 = (8 x 400) + 1, à 50 de la cible. Pour retrouver encore le pouce il faut ajouter encore un multiple de 8, dans ce cas 48 pour arriver à 3249, et la différence de 2 fait passer du pouce au **majeur.**

Ou : par une procédure plus générale, ayant déterminé que les multiples de 8 augmentés de 1 sont sur le pouce, diviser 152 et 3251 par 8 et, en fonction des restes, trouver le doigt correspondant.

Ou :construire un tableau, comme le suivant par exemple, pour découvrir les régularités dans la correspondance doigt-nombre, en s'intéressant aux différentes colonnes :

POUCE	INDEX	MAJEUR	ANNULAIRE	AURICULAIRE
1	2	3	4	5
	8	7	6	
9	10	11	12	13
	16	15	14	
17	18	19	20	21
	24	23	22	
25	26	27	28	29
	32	31	30	

dans la colonne de l'index et de l'annulaire, les nombres sont pairs (et les multiples de 8 sont tous sur l'index), alors qu'ils sont impairs dans les autres,

dans la colonne du pouce apparaissent les multiples de 8 augmentés de 1 (c'est-à-dire les nombres qui, divisés par 8, donnent un reste de 1) ; et l'on retrouve les considérations faites précédemment :

en divisant 152 par 8, le reste est 0, et ce nombre est donc un multiple de 8 de la colonne de l'**index**,

en divisant 3251 par 8, le reste est 3, par conséquent 3251 est dans la colonne du **majeur**.

Attribution des points

4 Réponse correcte pour les deux associations (152 - index, 3251 - majeur) avec explications complètes (description de la procédure ou détails à partir d'un tableau, …)

3 Réponses correctes avec explications peu claires
ou seulement la seconde réponse (3251 - majeur)avec explications claires

2 Les deux réponses correctes sans aucune explication ni détail
ou seulement la première réponse avec explications claires

1 Réponse correcte seulement pour la première question sans explication
ou début de recherche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Siena

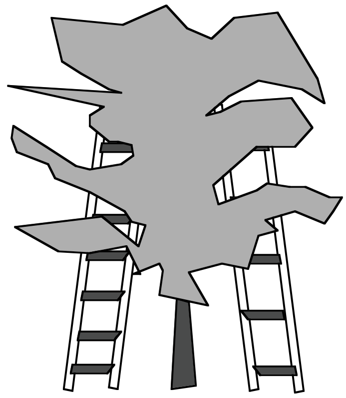
13. LES DEUX ÉCHELLES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Monsieur Dupommier a deux échelles pour cueillir les pommes de son verger. Les deux échelles sont de même longueur, mais sur l'une, les échelons sont distants de 20 cm et sur l'autre de 30 cm. Le premier et le dernier échelon des deux échelles sont à la même distance du sol.

Lorsque Monsieur Dupommier range les deux échelles dans son garage, il les pose l'une contre l'autre exactement et il ne voit alors que 45 échelons.

Quelle est la longueur des échelles, entre le premier et le dernier échelon.

Justifiez votre réponse.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

Arithmétique : comptage, multiples et multiples communs

Analyse de la tâche :

- Comprendre que les échelons de la première échelle correspondent aux multiples de 20, (en comptant les distances à partir du premier échelon) et que ceux de la seconde correspondent aux multiples de 30. Par conséquent, il y a des échelons « cachés » de l'échelle de derrière : ceux correspondants aux multiples communs de 20 et 30.
- Observer que sur les premiers 60 cm de la première échelle il y a 4 échelons et qu'il y en a 3 sur la deuxième échelle. Par conséquent, sur les premiers 60 cm des deux échelles placées l'une derrière l'autre, on voit 5 échelons (2 sont cachés : le premier et le 3^{e} de l'échelle de derrière). À partir de là, on voit 4 échelons pour chaque tronçon suivant de 60 cm.
- En déduire que, après les 5 premiers échelons visibles, il en reste 40 représentant le multiple de 4 qui donne 40, c'est-à-dire comprendre qu'il y a 10 intervalles de 60 cm, après les premiers 60 cm. Donc la longueur des échelles est de 6,60 m.

Ou : Travailler par « modules » avec un schéma graphique, de ce genre par exemple :

Echelle A	0	20	40	60	80	100	120	140	160	...
Echelle B	0	30		60	90		120	150		...

alors que le premier module de 0 à 60 cm est constitué de 5 échelons visibles, tous les autres (par exemple de 60 à 120) sont formés de 4 échelons visibles ; par conséquent : 45 - 1 = 44, puis 44 : 4 = 11, (nombre de modules) et 11 x 60 = 660, en cm.

Attribution des points

4 Réponse correcte (6,60 m) avec justification claire de la procédure

3 Réponse correcte mais avec justification peu claire

2 Réponse correcte sans aucune explication
ou procédure correcte, mais avec des erreurs de calcul

1 Début correct de recherche

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Sassari et C.I

14. D'UN ENCLOS À L'AUTRE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Avec 60 mètres de clôture, Monsieur Pasteur a construit un enclos à moutons de forme rectangulaire ; les mesures des côtés sont des nombres entiers de mètres.

Comme il vient d'acquérir d'autres moutons, Monsieur Pasteur a acheté 6 mètres supplémentaires de clôture et avec les 60 mètres de son ancienne clôture, il construit un nouvel enclos rectangulaire. Il remarque qu'une des dimensions du nouveau rectangle a 6 mètres de plus que l'ancienne et que l'autre dimension a diminué de 3 mètres, alors que l'aire de l'enclos a augmenté de 90 m^2.

Combien mesuraient les côtés du premier enclos rectangle ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle, périmètre, aire
- Arithmétique : addition et multiplication
- Algèbre : équations et systèmes d'équations

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il existe une famille de rectangles de périmètre 60, en m, dont la somme des mesures de la longueur et de la largeur est 30 m et une autre famille de périmètre 66.
- Procéder par essais organisés à partir de la décomposition de 30 en somme de deux nombres entiers positifs et, par exemple, les noter à l'aide d'un tableau du genre :

côtés du 1e rectangle	côtés du 2e rectangle	aire du premier	aire du deuxième	différence d'aire	
15 et 15	12 et 21	225	252	27	
16 et 14	13 et 20	224	260	36	
17 et 13	14 et 19	221	266	45	
…	…	…	…	…	
21 et 9	18 et 15	189	270	81	
22 et 8	19 et 14	176	266	**90**	
	23 et 7	20 et 13	161	260	99

- Conclure que 22 m et 8 m sont les côtés du premier rectangle.

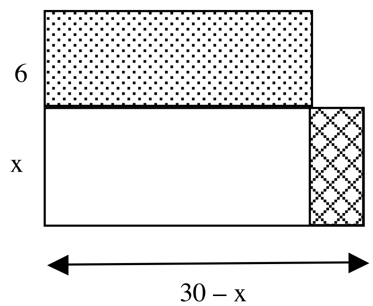
Ou :procéder algébriquement à partir d'un dessin qui montre le « passage » du premier au deuxième rectangle.

En désignant par x la mesure d'un des côtés du rectangle initial, on pose l'équation

$(x + 6)\ [(30 - x) - 3] = x(30 - x) = 90$, dont on tire

$9x = 72$, et $x = 8$.

Ou, en désignant par x et y les dimensions du rectangle initial, on pose $x + y = 30$ et $(x + 6)(y - 3) = 90 + xy$



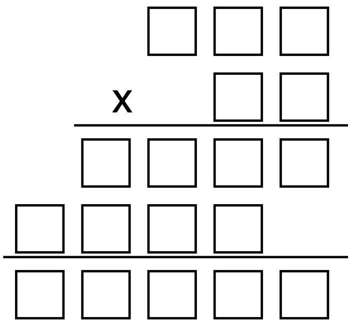
Attribution des points :

4 Réponse correcte (8 m et 22 m) avec explication claire de la procédure
3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires
2 Réponse correcte sans explication
ou procédure correcte mais avec erreur de calcul
1 Essais ou raisonnement qui témoignent d'une compréhension initiale du problème
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena e Parma

15. DRÔLE DE MULTIPLICATION (Cat. 7, 8, 9, 10)



Dany a reçu de sa cousine une drôle de devinette !

Il s'agit de reconstruire la multiplication « mystérieuse » de cette figure en sachant que les seuls chiffres qu'il peut écrire dans les cases sont 2, 3, 5 et 7.

Dany trouve cette devinette trop difficile, mais sa cousine l'encourage et lui dit qu'il n'y a qu'une manière de disposer les chiffres.

Reconstruisez la multiplication

Epliquez comment vous avez trouvé votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : tables de multiplication, algorithme de la multiplication
- Logique : organisation d'une recherche avec hypothèses et vérifications

Analyse de la tâche

- Vérifier d'abord systématiquement les produits des unités et constater que seuls cinq couples sont possibles (3 ; 5), (5 ; 3) (5 ; 5), (5 ; 7), (7 ; 5). Les autres couples conduisent en effet à un chiffre des unités dans le premier produit qui n'est pas sur la liste autorisée, comme : 7 x 3 = 21 donnerait 1 au chiffre des unités.
- Choisir un couple (3 ; 5) par exemple, et continuer par la recherche du chiffre des dizaines du premier facteur. Dans cet exemple, il y a une retenue de 1 et le produit de 5 par chacun des autres chiffres autorisés, plus la retenue de 1, donne 6 ou 1 et ne convient donc pas ! (fig. 1)
- Essayer ensuite (5 ; 3). Le chiffre des dizaines du premier facteur ne peut être que 7 selon le raisonnement précédent et qui conduit à 2 comme chiffre des dizaines du premier produit partiel. (fig. 2)

  Le chiffre des centaines du premier facteur est aussi 7, ce qui donne 2 et 3 pour les deux premiers chiffres du premier produit partiel. (fig. 3).
- Pour les mêmes raisons, le chiffre des dizaines du deuxième facteur ne peut être que 3. (fig. 4)
- Vérifier enfin que le résultat ne contient que les chiffres 2 ; 3 ; 5 ou 7, ce qui donne la solution. (fig. 5)

… … **3**	… **7** 5	**7** 7 5	7 7 5	7 7 5
x … **5**	x … 3	x … 3	x **3** 3	x 3 3
… … 5	… … **2** 5	**2 3** 2 5	2 3 2 5	2 3 2 5
… … … …	… … … …	… … … …	**2 3 2 5**	2 3 2 5
… … … … 5	… … … … 5	… … … … 5	… … … … …	**2 5 5 7 5**
fig. 1	fig. 2	fig. 3	fig. 4	fig. 5

- Comme l'énoncé dit qu'il n'y a qu'une solution, il n'est plus nécessaire de vérifier les couples (5 ; 7), (7 ;5) et (5 ;5) de la liste initiale. Mais si on essaye l'un de ces trois couples avant (5 ; 3), on aboutit dans chaque cas à une impasse : rapidement avec (7 ; 5) en raison du reste de 3 qui ferait apparaître un 8 dans les dizaines du premier quotient partiel, un peu plus loin pour le cas du couple (5 ;7) ; lors de l'addition finale pour le couple (5 ; 5) car les produits partiels peuvent être 5 x 555 = 2775 mais le produit final contient deux chiffres non autorisés : 55 x 555 = 30525.

Attribution des points

4 Réponse correcte avec explication de la démarche (étapes intermédiaires, impasses …)

3 Réponse correcte avec explication partielle ou confuse

2 Réponse correcte sans aucune explication

1 Début de recherche correct, avec au moins un couple possible pour les unités

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine :Isräel

16. PILE OU FACE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Quatre pièces de monnaie sont posées sur la table de Julien : une pièce de 20 centimes, une de 50 centimes, une pièce de 1 euro et une de 2 euros.

En associant à chaque pièce sa face visible, Julien observe que les quatre pièces forment la configuration suivante : (20 centimes, pile) ; (50 centimes, face) ; (1 euro, face) ; (2 euros, pile).

Julien, avec ces quatre pièces, invente un jeu de « pile ou face » : il lance les 4 pièces ensemble, note la configuration obtenue et recommence jusqu'à ce qu'il obtienne deux fois la même configuration.

Combien de fois Julien doit-il lancer les quatre pièces ensemble pour être certain d'obtenir deux fois la même configuration ?

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Combinatoire : nombre de quadruplets à 2 valeurs.
- Logique : principe des tiroirs (si 5 objets sont dans 4 tiroirs, un tiroir en contient au moins 2)

Analyse de la tâche

- Chercher combien on peut faire de configurations différentes : 2 faces possibles pour chacune des pièces, d'où $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ configurations différentes possibles, du genre :
  (20 cent., face) ; (50 cent., pile) ; (1 euro, pile) ; (2 euro, face)
  (20 cent., pile) ; (50 cent., pile) ; (1 euro, pile) ; (2 euro, face)
  (20 cent., face) ; (50 cent.,face) ; (1 euro, pile) ; (2 euro, face) …
  ou plus systématiquement, en ordonnant les pièces de 20 cent. 50 cent. 1 euro, 2 euros :
  ffff, fffp, ffpf, ffpp   fpff, fpfp, fppf, fppp   pfff, pffp, pfpf, pfpp   ppff, ppfp, pppf, pppp
  ou encore en déterminant toutes ces permutations à l'aide d'un schéma en arbre.
- Comprendre qu'une configuration supplémentaire sera certainement une des 16 précédentes.
- Conclure par le principe des tiroirs qu'avec 17 lancers, Julien peut être certain d'avoir obtenu deux configurations identiques.

Attribution des points

4 Réponse correcte (17 lancers) avec explications claires
3 Réponse correcte (17) avec explications incomplètes ou confuses
2 Réponse correcte (17), sans explication
  ou réponse « 16 » (correspondant au nombre des combinaisons, sans tenir compte de « deux fois la même) avec justification
1 Début cohérent de recherche
0 incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

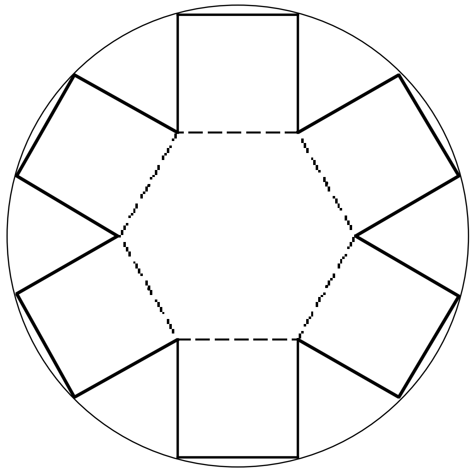
17. LA BOÎTE À CHAPEAUX (Cat. 8, 9, 10)

Louise veut construire une boîte à chapeaux de base hexagonale.

À cet effet, elle a découpé cette figure, dans un disque de carton, composée d'un hexagone régulier avec des carrés sur chaque côté.

Elle a l'intention de plier les faces carrées le long des pointillés et de les coller deux à deux avec du ruban adhésif pour former sa boîte.

Mais Louise n'est pas certaine que les parties du disque qui resteront seront suffisantes pour faire le couvercle de la boîte.



Quelle est votre opinion ?

Motivez votre réponse de manière convaincante, avec des considérations géométriques.

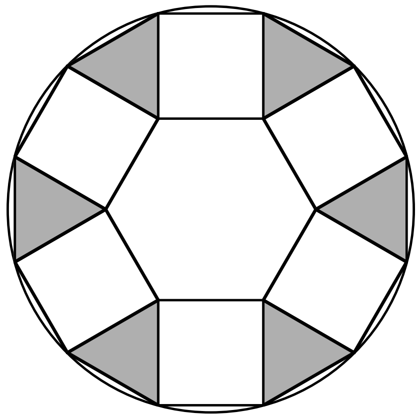
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : polygones réguliers, angles, aire

Analyse de la tâche

- Comprendre que la demande se situe au niveau de l'aire des figures restantes et celle de l'hexagone central.
- Montrer que les triangles découpés (en gris sur le dessin ci-contre) sont équilatéraux et ont des côtés de même longueur que ceux de l'hexagone. Pour la « démonstration » il faut faire intervenir les propriétés du carré (côtés égaux), la décomposition de l'hexagone en six triangles équilatéraux et le calcul de l'angle formé par deux côtés de carrés adjacents, en degrés (360 – 120 – 2 x 90 = 60 ou 360/6 = 60), pour arriver à la conclusion que, les triangles gris étant isocèles avec un angle de 60 degrés, sont équilatéraux et isométriques aux six triangles contenus dans l'hexagone).
- Il est aussi possible de découper les triangles et de les coller ensemble pour former le couvercle, mais cette explication ne répond pas entièrement à la demande.



- Conclure que les six triangles, ensemble, pourront recouvrir exactement l'hexagone de base et que, en les collant deux à deux par du ruban adhésif (et en repliant les petites parties de cercle qui dépassent) on pourra construire le couvercle de la boîte

Attribution des points

4 Réponse correcte (Louise peut construire le couvercle) avec « démonstration » satisfaisante d'un point de vue géométrique (aire suffisante, sans tenir compte des doutes de la réalisation physique de l'objet)

3 Réponse correcte avec explications incomplètes du point de vue géométrique

2 Réponse correcte avec seulement le découpage et le collage

1 Début de raisonnement correct ou réponse du genre « oui elle peut, on a essayé »

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Parma

18. PROBLÈME DE CITERNES (Cat. 8, 9, 10)

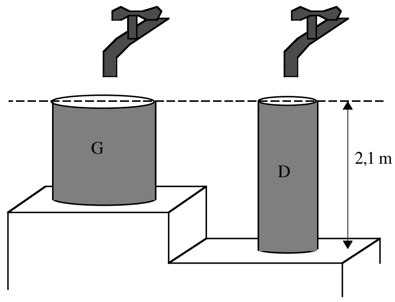
Le père François est un éleveur prudent. Il dispose de deux citernes cylindriques pour stocker l'eau prévue pour abreuver son bétail. Elles sont posées sur un muret, comme le montre le dessin, sous deux robinets qui coulent régulièrement.

Leurs faces supérieures sont au même niveau et la citerne de droite a 2,1 m de hauteur. Le robinet de gauche remplit la citerne de gauche en 5 heures et le robinet de droite remplit la citerne de droite en 3 heures et demie.

Les deux citernes étant vides, François ouvre les deux robinets en même temps. Après 2 heures, l'eau dans la citerne de droite est au même niveau que l'eau dans la citerne de gauche.

Quelle est la hauteur de la citerne de gauche ?

Expliquez votre raisonnement.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, division, fractions, proportionnalité
- Algèbre : équations

Analyse de la tâche

- Comprendre que la forme cylindrique des citernes et l'écoulement régulier des robinets font que la hauteur d'eau dans chaque citerne est proportionnelle au temps de remplissage. (Indépendamment du débit de chaque robinet)
- Raisonner par proportionnalité : en 3,5 heures, l'eau monte de 2,1 m dans la citerne de droite (ou 210 minutes pour 210 cm, c'est-à-dire 1cm/minute), en 5 heures, l'eau monte de la hauteur totale de la citerne de gauche

  Faire le point après 2 heures : en 3,5 h on remplit 2,1 m de la citerne de droite, en 1 h on en remplit 0,6 m (2,1 : 3,5) et en 2 h on en remplit 1,2 m. (« règle de trois »), ou recherche de quatrième proportionnelle : 3,5 / 2,1 = 2 / *x*.

  Il reste donc (2,1 – 1,2) m = 0,9 m à remplir dans la citerne de droite, de même que pour la citerne de gauche.

  Si en 3 h, on en remplit 0,9 m, en 1 h on remplit 0,3 m et en 5 mn, on remplit les 1,5 m de la citerne de gauche. Donc la hauteur de cette citerne G est 1,5 m.

  (Ces raisonnements peuvent s'illustrent par un tableau de proportionnalité de ce genre :

durée (h)	0	1	2	3,5	écart de 1,5 (3,5 – 2)	écart de 3(5 – 2)	5
citerne D (m)	0	*0,6*	*1,2*	2,1	reste *0,9*		
citerne G (m)	0	*0,3*				reste *0,9*	?

Ou raisonner à l'aide de fractions :

- Trouver qu'après deux heures, la grande citerne de droite a été remplie aux 4/7 de sa hauteur, soit de 1,2 m.
- Comprendre que la citerne de gauche a été remplie pendant ce temps aux 2/5 de sa hauteur.
- Se rendre compte qu'après ces deux heures, l'eau dans les deux citernes étant arrivée au même niveau, les hauteurs restantes sont les mêmes, représentant les 3/7 de la citerne de droite et les 3/5 de la citerne de gauche, à savoir 0,9 m.
- En déduire la hauteur de la citerne de gauche : 0,9 x 5/3, ce qui donne le résultat de 1,5 m.

Ou, par l'algèbre, en procédure experte, en désignant par x la hauteur de la citerne de gauche, par 2,1/3,5 la vitesse de montée du liquide dans la citerne de droite, $x/5$ la vitesse de montée du liquide dans le vase de gauche, traduire l'égalité des deux niveaux ou de ce qui dépasse par l'équation $2{,}1 – 2(2{,}1/3{,}5) = x – 2(x/5)$ qui donne $x = 1{,}5$.

Attribution des points

4 Réponse correcte (1,5 m) avec explications détaillées de la recherche.

3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires

2 Réponse seule sans explication, ou réponse incorrecte avec raisonnement correct.

1 Début correct de recherche

0 Incompréhension du problème.

Niveau : 8, 9, 10

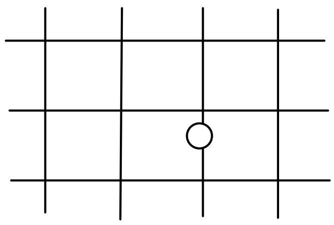
Origine : Luxembourg et CI

19. LE JEU DE FRANC-CARREAU (Cat. 9, 10)

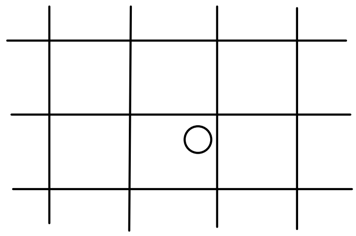
À la cour du roi Louis XV, les nobles aimaient jouer au jeu de « Franc-Carreau ».

Antoine et Basile font une partie. Pour cela, Antoine prend un de ses écus (pièces de monnaie de l'époque, de 1 cm de rayon), et le lance sur un carrelage dont les carreaux sont des carrés de 10 cm de côté.

Antoine fait « Franc Carreau » quand sa pièce tombe sur une seule case, dont elle peut toucher les bords, mais sans empiéter sur une autre case. Dans ce cas, il gagne : il reprend alors son écu et Basile lui en donne un autre. Dans le cas contraire, c'est Basile qui gagne et qui prend l'écu d'Antoine.



Antoine perd son écu



« Franc-Carreau » : Antoine gagne un écu

Dans quelle partie du carré doit se trouver le centre de la pièce d'Antoine pour qu'il puisse faire « Franc Carreau » ?

Ce jeu vous paraît-il équitable ou sinon, quel est le joueur le plus avantagé ?

Justifiez votre affirmation.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Géométrie : position relative d'un disque et d'un carré, aire du carré, proportionnalité
- Approche des probabilités : rapport entre l'aire du domaine favorable et l'aire du carré possible, jeu équitable

Analyse de la tâche

- Se rappeler la condition pour qu'une droite coupe un cercle : la distance du centre du cercle à cette droite est inférieure au rayon de ce cercle.
- Déterminer le domaine où doit tomber le centre de l'écu, de 1 cm de rayon, pour faire « Franc-Carreau » : un carré dont les côtés sont à 1 cm de distance de ceux du carreau, à l'intérieur, c'est-à-dire, vu que les carreaux ont 10 cm de côté, le carré intérieur devra avoir 8 cm de côté et le même centre que le carreau. (D'après la donnée, si le centre se trouve sur un côté de ce carré intérieur, la pièce touche le côté du carreau sans empiéter sur un autre et le « Franc-Carreau » est valable)
- Comprendre que les chances de gagner sont proportionnelles à l'aire du carré intérieur : plus ce dernier est grand par rapport au carreau, plus les chances de gagner augmentent. Avec les dimensions données, le carré intérieur a une aire de 64 cm^2 et le carreau 100 cm^2. Il y a donc 64 chances sur 100 de gagner.
- Antoine a donc plus d'une chance sur deux de gagner un écu et moins d'une chance sur deux d'en perdre un. Le jeu est donc plus favorable pour lui que pour Basile.

Attribution des points

4 Réponses correctes, (carré intérieur concentrique de 8 cm de côté et jeu favorable à Antoine) avec justifications qui expliquent clairement où peut se trouver le centre de la pièce, puis par rapport d'aires, qu'Antoine est avantagé par rapport à Basile

3 Réponses correctes avec justification peu claires ou incomplètes

2 Réponse correcte et justifiée à la première question seulement
ou les deux réponses correctes sans justification.

1 Réponse correcte à la première question, sans justification

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Franche-Comté