Problèmes :	Catégories :	Thèmes :	Origine :
1. Quatre nombres à écrire	3 4	Ar Co	LU
2. La planète TAEP	3 4	Géo Co	gpp
3. Questions et réponses	3 4	Ar	7RMT
4. Boîte à recouvrir	3 4 5	Géo	gpp
5. Feuilles mortes	3 4 5	Ar Géo	Gr.géopl
6. Le jardinier	4 5	Ar	PU
7. La planète PENTA	5 6	Géo	gpp
8. Les dix points	5 6 7	Géo	Gr.géopl
9. Loterie palindrome	5 6 7	Ar Co	SI
10. Blanc ou gris	5 6 7	Lo	BB
11. Balances	6 7 8	Lo	8RMT
12. Quadrillage I	6 7 8	Ar Géo	10RMT
13. Les nombres de M. Trapèze	6 7 8 9 10	Ar Alg	fj
14. Devinez le nombre	7 8 9 10	Ar Alg Lo	SI
15. Développement d’un prisme	8 9 10	Géo Co	17RMT
16. Le dé de monsieur Multiplitout	8 9 10	Ar	LU
17. Marathon de Transalpie 2010	8 9 10	Ar	SI
18. Promenade dans le parc	9 10	Ar Alg Géo	Gr.0º
19. Quadrillage II	9 10	Ar Alg Géo	10RMT

1. QUATRE NOMBRES À ÉCRIRE (Cat. 3, 4)

Écrivez dans chacune des quatre cases ci-dessous un des nombres : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ;
en respectant ces trois conditions :

- les quatre nombres doivent être différents ;
- si vous les additionnez, vous devez trouver 15 ;
- si vous multipliez par 3 le nombre de la case *d*, vous devez obtenir le nombre de la case *a*.

case *a*	case *b*	case *c*	case *d*

Écrivez toutes les solutions possibles.

Expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication
- Logique - combinatoire

Analyse de la tâche

- Dans une approche aléatoire, écrire une ou plusieurs combinaisons des quatre nombres et vérifier si elles respectent les conditions.
- Se rendre compte que dresser la liste complète des combinaisons possibles des quatre nombres (360) et que vérifier celles qui respectent les conditions est une tâche trop longue.

  Choisir par conséquent une approche tenant compte de l'une des conditions (condition du triple ou de la somme), afin de limiter la recherche et construire de manière déductive les solutions possibles, en tenant compte du fait que les nombres doivent être tous différents.

  La condition du « triple » ne donne que deux possibilités pour le premier et le dernier nombre : 3 et 1 ou 6 et 2 ; par essais successifs ou en tenant compte de la somme « 15 », les élèves peuvent arriver aux solutions 3651 et 3561 dans le premier cas, 6432 ou 6342 dans le deuxième cas.

  La condition de la somme « 15 » choisie en premier conduit aux quadruplets (6 ; 5 ; 3 ; 1), (6 ; 4 ; 3 ; 2) et à l'inventaire de leurs permutations pour déterminer les quatre solutions.

Ou : calculer la somme des six nombres (21) et en déduire que 21 – 15 = 6 représente la somme des deux nombres non choisis, qui sont : soit 1 et 5, soit 2 et 4. En déduire que les quatre nombres qui pourront être choisis sont : soit 2, 3, 4, et 6 ; soit 1, 3, 5 et 6.

- Remarquer que, comme le premier nombre est le triple du dernier, dans le premier cas, ces deux nombres seront 6 et 2 ; dans le second cas ce seront 3 et 1. Puis comprendre qu'on peut encore dans chaque cas permuter les deux nombres « centraux »
- Exprimer les quatre solutions et donner quelques éléments d'explication (relatifs à l'une des procédures ci-dessus).

Attribution des points

4 Les quatre solutions correctes (3561; 3651; 6342; 6432), avec explication (quelques mots) de la démarche utilisée

3 Les quatre solutions correctes, sans explication

2 Trois ou quatre solutions correctes, avec une solution incorrecte
ou deux solutions correctes parce qu'un des deux couples (3 ; 1), (6 ; 2) n'a pas été pris en compte ou parce que les permutations des deux chiffres centraux n'ont pas été envisagées, sans solution incorrecte

1 Une seule solution correcte
ou deux solutions correctes avec d'autres incorrectes
ou confusion entre cases a et d : (1563; 1653; 2346; 2436),

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3, 4
Origine : Luxembourg

2. LA PLANÈTE TAEP (Cat. 3, 4)

Sur la planète TAEP, l'alphabet n'a que 4 lettres : A, E, P, T.
Tous les mots ont quatre lettres et s'écrivent toujours en majuscules.
Quatre enfants, TAPA, PTPP, PATE et EEEE écrivent leur nom sur une feuille de papier transparent (figure 1). Lorsqu'ils retournent la feuille, ils ne lisent plus leurs noms comme ils les avaient écrits (figure 2).

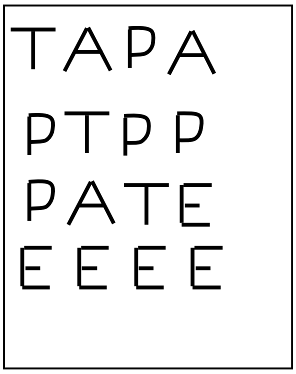


figure 1

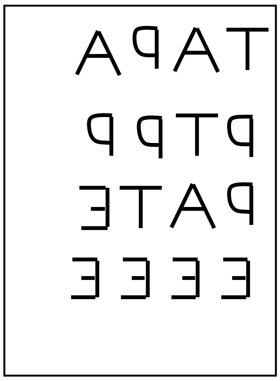


figure 2

PTPP dit : « Lorsque ma sœur écrit son nom et qu'elle retourne la feuille ensuite, elle peut lire son nom comme elle l'avait écrit. »

Quel peut être le nom de la sœur de PTPP ?

Écrivez tous les noms de la planète qui ne changent pas lorsqu'on retourne la feuille sur laquelle on les a écrits.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : symétrie axiale
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles d'écriture et de la planète TAEP d'après les consignes données et les exemples : il n'y a que 4 lettres à disposition, chaque mot a 4 lettres, il peut y avoir plusieurs fois la même lettre dans le même mot, ...
- Constater que deux des quatre lettres, A et T, restent identiques lorsqu'on retourne la feuille (car elles ont un axe de symétrie vertical) et en déduire que le prénom cherché doit être composé de ces deux lettres.
- Tenir compte que le mot lui-même doit aussi être symétrique (ou pouvoir se lire de gauche à droite ou de droite à gauche, ou d'un côté et de l'autre de la feuille).
- Dresser l'inventaire des mots composés de A et de T de manière systématique permettant de ne pas en oublier (par exemple en commençant par des mots de quatre lettres A, puis de trois lettres A et un T, ...) et parmi eux choisir ceux qui sont symétriques.
- Écrire la liste des quatre noms possibles : AAAA ; TTTT ; ATTA ; TAAT

Attribution des points

4 Les quatre noms, sans erreur : AAAA ; TTTT ; ATTA ; TAAT

3 Les deux lettres A et T sont découvertes et trois noms sont trouvés mais il en manque un ou il y en a un qui n'est pas symétrique (du genre AAAT)

2 Les deux lettres A et T sont découvertes, mais avec seulement deux noms corrects et au maximum une erreur
ou trois noms corrects sont trouvés mais avec d'autres noms contenant des lettres non symétriques N ou P

1 Une seule solution correcte
ou prise en compte d'une seule des deux conditions (exemples : PEEP, PAAP, ou TATA…)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : groupe problèmes, adaptation d'une ancienne proposition

3. QUESTIONS ET RÉPONSES (Cat. 3, 4)

Nicolas a reçu un nouveau jeu.
Dans ce jeu, le joueur doit répondre à des questions et déplacer son pion sur une piste numérotée de 0 à 50.
Au début d'une partie, le pion est placé sur la case 25.
Chaque fois que le joueur donne une bonne réponse, il avance son pion de trois cases.
Chaque fois qu'il donne une mauvaise réponse, il recule son pion de deux cases.
À la fin de la partie, le pion de Nicolas se trouve sur la case 40.
Au cours de la partie Nicolas a donné sept bonnes réponses, toutes les autres étaient mauvaises.

Combien Nicolas a-t-il donné de mauvaises réponses au cours de la partie ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : suite des nombres naturels, les quatre opérations

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de déplacement : faire éventuellement quelques essais.
- Déterminer que, s'il n'avait jamais répondu faux, Nicolas aurait avancé, pour ses 7 réponses justes, de 21 cases (3 x 7) et qu'il aurait atteint la case 46 (21 + 25) comprendre qu'il y a 6 cases de trop (46 – 40) qui devront être compensées par 3 réponses fausses: (6 : 2 ou 6 - 2 - 2 - 2).

Ou : calculer que Nicolas a avancé de 15 cases en tout (de la case 25 à la case 40 ou 40 - 25), et qu'il pourrait y arriver avec 5 réponses justes; il faut alors se rendre compte qu'il a deux autres réponses justes, ce qui lui donnerait 6 cases d'avance. Pour finir sur le 40, il devrait donc répondre faux trois fois, ce qui le ferait reculer de 6 cases.

Ou : procéder pas à pas avec des suites de 7 additions et de quelques soustractions pour parvenir à 40, avec ajustements nécessaires (par exemple 25 + 3 + 3 - 2 + 3 + 3 - 2 + 3 + 3 + 3 = 42, 42 - 2 = 40) et dénombrement des soustractions.

Ou : dessiner la piste et effectuer 7 déplacements de 3 en 3 à partir de 5 pour arriver à 26 et retourner à 40 en 3 déplacements de 2 en 2.

Attribution des points

4 Réponse correcte (3 mauvaises réponses) avec explication claire (opérations ou repères sur la suite des nombres ou solution graphique…)

3 Réponse correcte, sans explications ou avec explications partielles ou peu compréhensibles

2 Réponse obtenue à partir d'un raisonnement correct comportant une erreur de calcul ou un oubli

1 Début de recherche cohérent

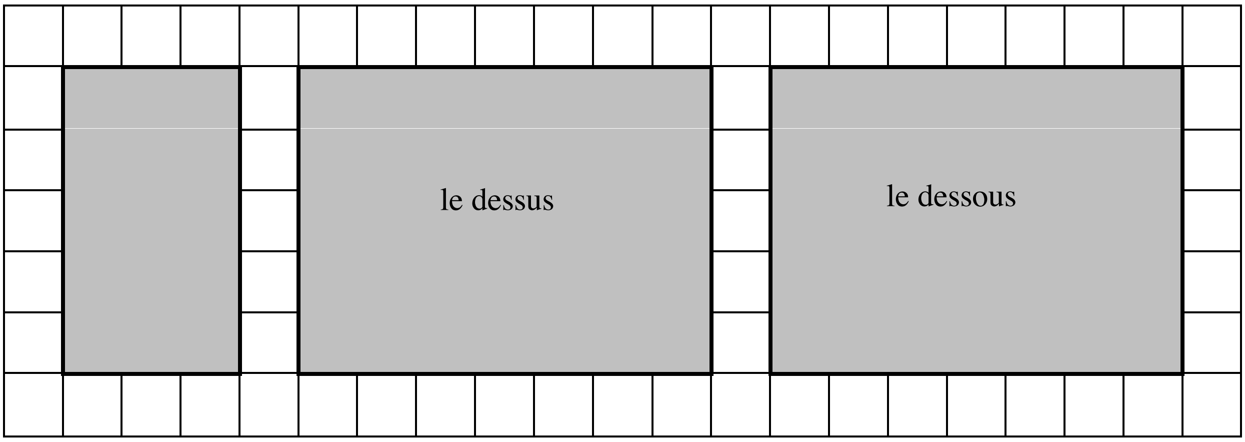
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

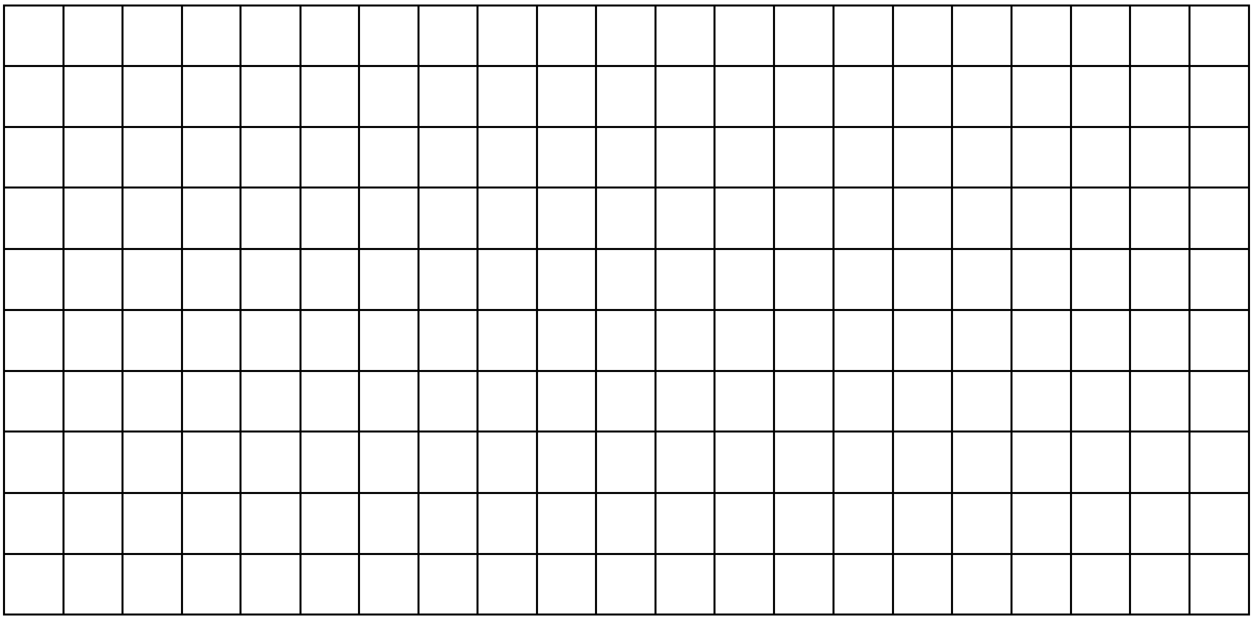
Origine : *Le nez de Pinocchio*. 7e RMT II.4

4. LA BOÎTE À RECOUVRIR (Cat 3, 4, 5)

Graziella veut couvrir entièrement une boîte avec des rectangles de papier.
Elle a déjà dessiné ces trois rectangles pour couvrir exactement le dessous de la boîte, le dessus de la boîte et une des autres faces de la boîte.



Dessinez sur le quadrillage ci-dessous les trois rectangles qui manquent pour couvrir exactement les autres faces de la boîte.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie plane et géométrie dans l'espace : rectangle et parallélépipède rectangle

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit d'une boîte « familière » (parallélépipède rectangle) puisque l'énoncé parle de rectangles.
- Imaginer la boîte et ses six faces : le dessous et le dessus (imaginées horizontales) et les quatre faces (imaginées verticales).
- Se rendre compte que les 6 faces peuvent se répartir en 3 couples de faces égales (les faces opposées) et en déduire que, si le dessous et le dessus sont les deux rectangles égaux donnés, le troisième rectangle est une des faces (verticales).
- Se rendre compte qu'il faudra dessiner un quatrième rectangle égal à celui qui est donné.

- Comprendre que les deux derniers rectangles doivent s'adapter aux premiers. Ils devront avoir la même longueur que les deux bases (le dessous et le dessus) et leur largeur devra correspondre à la « hauteur » de la boîte, donnée par un des côtés de la face verticale déjà dessinée.
- Dessiner les trois faces par report de mesures ou par comptage de carreaux ou par essais et manipulations.

Attribution des points

4 Dessin correct et précis des trois faces qui manquent (une face 3 x 5, deux faces 7 x 3)

3 Dessin correct des trois faces qui manquent, mais avec des tracés imprécis (à main levée, lignes qui ne correspondent pas exactement à celles du quadrillage, …)

2 Dessin correct de la quatrième face (3 x 5) et une erreur dans les 5e et/ou 6e faces (côtés non correspondant aux données)

1 Dessin correct d'une ou deux faces
ou trois faces dessinées mais avec erreurs (faisant seulement comprendre que les élèves se sont rendu compte qu'il fallait 6 faces en tout)

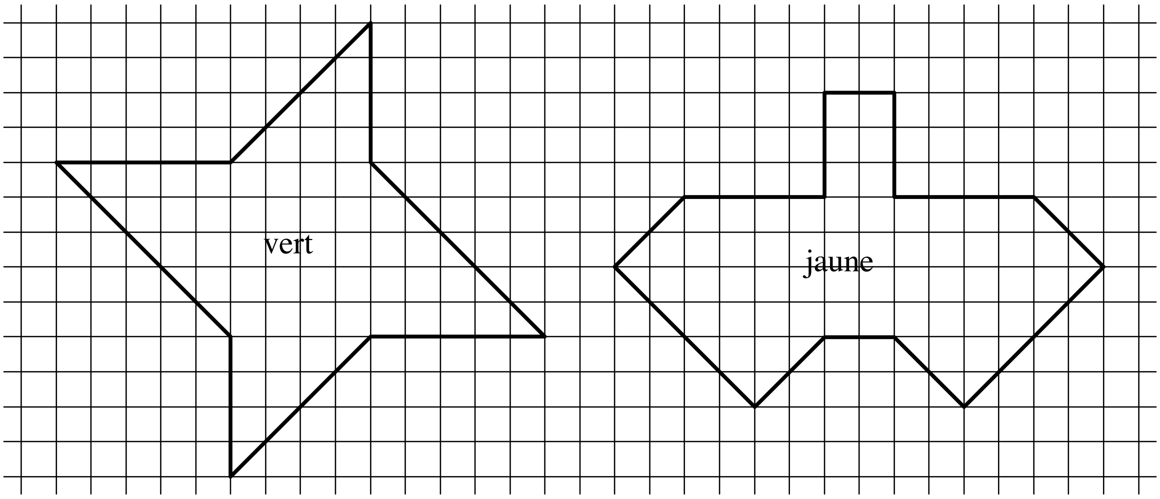
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : gpp

5. FEUILLES MORTES (Cat. 3, 4, 5)

Pour la fête de l'automne, on a décidé de décorer la salle de gymnastique de l'école avec des feuilles découpées dans du carton vert et avec des feuilles découpées dans du carton jaune.
Voilà le modèle des feuilles.



Lisa a découpé une feuille verte et Tom a découpé une feuille jaune.

Faut-il plus de carton pour la feuille verte ou faut-il plus de carton pour la feuille jaune ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : comptage organisé
- Géométrie : carré, triangle demi-carré
- Grandeurs et mesures : aire, unités de mesure ou comparaison par superposition

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut comparer les aires des deux figures.
- Dénombrer les carreaux et demi-carreaux un à un de chaque figure, (méthode sujette à des erreurs de comptage) puis effectuer les échanges nécessaires pour les compter selon une unité de mesure commune : en carreaux (ou demi-carreaux), 61 (122) pour la figure verte et 62 (124) pour la jaune. (Au cas où ce sont les « morceaux » qui sont comptés, sans tenir compte de leurs aires respectives, on obtiendrait 70 pièces pour la figure verte et 70 pour la jaune.)

Ou : décomposer les figures en rectangles, carrés et triangles et se rendre compte que les triangles observés sont des moitiés de carrés.

Reconstruire alors les carrés « entiers » pour en compter plus facilement les carreaux, par regroupement. Par exemple, observer que la figure verte est composée de deux triangles qui constituent un carré de 4 x 4, de deux triangles qui constituent un carré de 5 x 5 et d'un rectangle de 4 x 5, ce qui donne une aire de 16 + 25 + 20 = 61 (en carreaux). De même on peut regrouper les parties de la figure jaune en deux rectangles de 4 x 10 et 2 x 3 et quatre carrés de 2 x 2, ce qui donne une aire de 40 + 6 + 4 x 4 = 62 (en carreaux)

Ou : procéder par découpage d'une des deux feuilles pour paver l'autre et constater qu'il manque (ou qu'il reste) un morceau et en conclure que la feuille jaune a une aire plus grande.

Ce problème peut provoquer un conflit aire - périmètre et certains groupes peuvent comparer les figures en mesurant les longueurs de leurs côtés, ce qui conduirait à dire que la figure verte est plus grande. De même une confusion entre aire et « encombrement » (plus grande longueur intérieure, par exemple entre deux sommets de la figure) conduirait au même résultat.

Attribution des points

4 Réponse correcte (il faut plus de carton pour la figure jaune que pour la figure verte) avec le détail de la démarche utilisée (calculs, découpages, parties équivalentes mises en évidence ...)

3 Réponse correcte avec des explications incomplètes mais qui témoignent d'une procédure correcte

2 Réponse fausse mais témoignant d'une procédure correcte (par exemple avec erreurs de comptage dues à des difficultés dans les transformations des demi-carreaux en carreaux)

1 Début de raisonnement correct mais n'aboutissant pas aux déterminations des aires
ou réponse correcte (jaune) sans aucune justification ni détail de calcul

0 Incompréhension du problème ou comparaison des figures par détermination de leur périmètre ou comptage des pièces sans tenir compte de leur aire

Niveaux : 3, 4, 5

Origine: Problème préparé dans la continuité des travaux du groupe géométrie plane (ex « aires »)

6. LE JARDINIER (Cat. 4, 5)

Un jardinier plante 58 rosiers dans deux sortes de bacs :
- des bacs ronds qui contiennent chacun trois rosiers,
- des bacs carrés qui contiennent chacun quatre rosiers.

Le jardinier veut utiliser le moins possible de bacs pour planter tous ses rosiers.
Il veut aussi que tous les bacs utilisés soient complets et contiennent bien soit trois rosiers, soit quatre rosiers.

Combien de bacs de chaque sorte devra-t-il choisir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication et division et leurs propriétés, multiples.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les 58 rosiers seront entièrement répartis dans des bacs de contenances différentes et que le nombre total de bacs doit être minimum.
- Comprendre qu'il faut essayer de mettre le maximum de rosiers sans les bacs carrés (qui en contiennent 4 alors que les autres n'en ont que 3) et diviser le nombre total par 4. 58 : 4 = 14 reste 2 et procéder par ajustements.

  Par exemple, comme 2 roses ne peuvent remplir entièrement un bac rond, retirer un bac carré et additionner ces 4 roses aux deux roses du reste précédent pour obtenir 6 roses qui permettent de remplir deux 2 bacs ronds. 6 : 3 = 2.
- Exprimer alors la solution 13 bacs carrés et 2 bacs ronds.

Ou, par des considérations sur la décomposition de 58 en somme de multiples de 4 et de 3, constater que 58 n'est ni multiple de 3 ni multiple de 4 et qu'il faudra deux types de bacs si on souhaite qu'ils soient tous pleins et qu'il faudra alors rechercher les décompositions de 58 en sommes de multiples de 3 et de multiples de 4 : il y en a cinq seulement après éliminations successives :

$$58 = 6 + 52 = 18 + 40 = 30 + 28 = 42 + 16 = 54 + 4$$

- Pour chacune des décompositions, calculer le nombre de bacs utilisés et constater que c'est la première décomposition qui donne le nombre minimum : 15 (2 bacs de 3 et 13 de 4), les autres donnent 16, 17, 18 et 19 bacs.

  (Les recherches des décompositions en multiples de 3 et de 4 peuvent évidemment s'organiser très différemment d'un groupe à l'autre, de longs inventaires ou tableaux fastidieux à des listes économiques).
- Rédiger la solution et les explications : le choix le plus économique comporte 15 bacs, permettant de contenir les 58 rosiers (13 x 4 + 2 x 3 = 58 et 13 + 2 = 15).

Attribution des points

4 La solution correcte (2 bacs ronds et 13 bacs carrés) avec les explications correspondantes (comparaison avec les 4 autres décompositions possibles ou optimisation du nombre de vases carrés)

3 La solution correcte, avec explications incomplètes (toutes les décompositions ne sont pas envisagées ou l'optimisation n'est pas expliquée)

2 La solution correcte sans explication
ou les cinq décompositions possibles sans le calcul du nombre de pots

1 Solution non optimale respectant la contrainte des 58 rosiers

0 Réponse au hasard ou qui ne tient pas compte des données, ou incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine : Puglia

7. LA PLANÈTE PENTA (Cat. 5, 6)

Sur la planète PENTA, l'alphabet n'a que 5 lettres : A, E, N, P. T.
Tous les mots ont cinq lettres et s'écrivent toujours en majuscules.
Quatre enfants, TAPAT, PTPPP, NANET et EEEEE écrivent leur nom sur une feuille de papier transparent (figure 1). Lorsqu'ils retournent la feuille, ils ne lisent plus leurs noms comme ils les avaient écrits (figure 2).

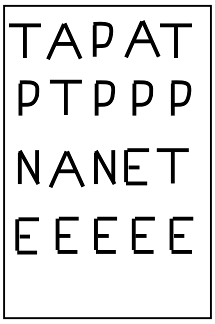


figure 1

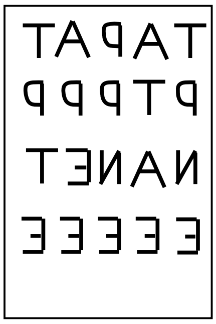


figure 2

PTPPP dit : « Lorsque ma sœur écrit son nom et qu'elle retourne la feuille ensuite ; elle peut lire son nom comme elle l'avait écrit. »

Quel peut être le nom de la sœur de PTPPP ?

Écrivez tous les noms de la planète qui ne changent pas lorsqu'on retourne la feuille sur laquelle on les a écrits.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : symétrie axiale
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles d'écriture et de lecture de la planète PENTA d'après les consignes données et les exemples : il n'y a que 5 lettres à disposition, chaque mot a 5 lettres, il peut y avoir plusieurs fois la même lettre dans le même mot, ...
- Constater que deux des cinq lettres, A et T, restent identiques lorsqu'on retourne la feuille (car elles ont un axe de symétrie vertical) et que le prénom cherché doit être composé de ces deux lettres.
- Tenir compte que le mot lui-même doit aussi être symétrique (ou pouvoir se lire de gauche à droite ou de droite à gauche, ou d'un côté et de l'autre de la feuille).
- Dresser l'inventaire des mots composés de A et de T ayant cette propriété, de manière systématique permettant de ne pas en oublier (par exemple en commençant par des mots de 5 lettres A, puis de 4 lettres A et un T, ...)
- Écrire la liste des huit noms possibles : AAAAA ; AATAA, ATATA, TAAAT, ATTTA, TATAT, TTATT, TTTTT.

Attribution des points

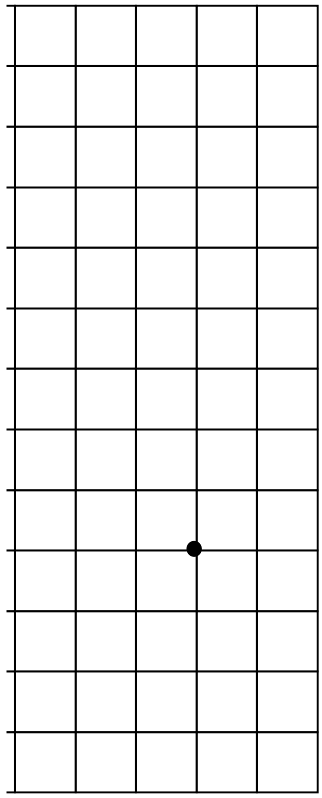
4. Les huit noms, sans erreur : AAAAA ; AATAA, ATATA, TAAAT, ATTTA, TATAT, TTATT, TTTTT.
3. Les deux lettres A et T sont découvertes, mais il n'y a que 6 ou 7 noms corrects
   ou la liste est complète, mais il y a un ou deux noms qui ne sont pas symétriques (du genre AAATA)
2. Les deux lettres A et T sont découvertes, mais il n'y a que 4 ou 5 noms corrects
   ou liste de 6 à 8 noms corrects mais avec d'autres noms contenant des lettres non symétriques E, N ou P
1. Quelques essais aléatoires avec de 1 à 3 noms corrects seulement
   ou prise en compte d'une seule des deux conditions (exemples : PEEEP, PAEAP, ou TATTA…)
0. Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : groupe problèmes, adaptation d'une ancienne proposition

8. LES DIX POINTS (Cat. 5, 6, 7)

Il y a dix points marqués sur la grille dessinée ci-dessous.
François en a trouvé quatre qui sont les sommets d'un rectangle.



Trouvez ces quatre points, dessinez le rectangle en rouge et expliquez pourquoi vous pensez que c'est un rectangle.

Anne dit qu'on peut dessiner plus d'un rectangle dont les sommets sont quatre des dix points donnés.

Qu'en pensez-vous ?

ANALISI A PRIORI

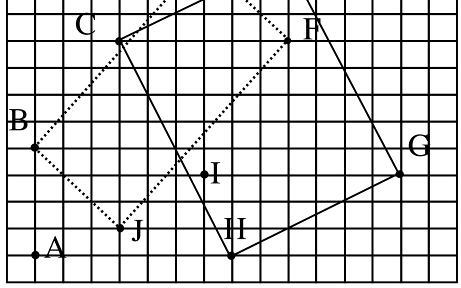
Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle et ses propriétés (parallélisme, angle droit, isométrie des côtés opposés, ...)

Analyse de la tâche

- Observer la configuration des points et chercher si on y trouve plusieurs couples de points qui sont les extrémités de segments parallèles, dans une direction donnée. (Par exemple, horizontalement, DE, CF, IG, AH) puis vérifier si ces couples définissent des segments de même longueur (dans l'exemple précédent IG et AH), pour finalement vérifier s'ils peuvent appartenir à un même rectangle, c'est-à-dire s'ils déterminent deux nouveaux côtés perpendiculaires. (Dans l'exemple précédent, AHGI est un parallélogramme non rectangle, DIGE est un quadrilatère qui n'a que deux angles droits ...)

  Effectuer la même recherche dans les autres directions, verticalement puis en oblique. (Par exemple on remarque que AB et CJ sont parallèles mais ne sont pas isométriques). DF et BJ sont parallèles (diagonales du quadrillage) et isométriques. Ils déterminent un parallélogramme BJFD qui n'est pas un rectangle.



- Dans le cas précédent où l'on ne peut pas déterminer visuellement si le parallélogramme BJFD est un rectangle, les vérifications nécessitent les mesures des angles (ou comparaisons avec l'angle droit d'une équerre ou d'une feuille de papier) ou de s'apercevoir que les côtés BD et JF ne suivent pas des diagonales du quadrillage comme les deux autres côtés.

-Poursuivre l'examen systématique des couples de points déterminant des segments parallèles et isométriques, puis vérifier les angles, pour découvrir « le » rectangle de François, dont quatre sommets figurent parmi les dix points donnés : CHGE.

- Dessiner le rectangle CHGE, expliquer pourquoi c'est un rectangle : quatre angles droits ou deux paires de côtés parallèles, de même longueur et perpendiculaires ; ou deux diagonales isométriques se coupant en leur milieu ou deux axes de symétrie perpendiculaires aux côtés (« côtés opposés isométriques et parallèles » ne suffisent pas à définir un rectangle, mais seulement un parallélogramme), puis dire qu'on pense qu'Anne a tort (car on n'a pas trouvé d'autre rectangle).

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (dessin de l'unique rectangle CHGE et « on pense qu'Anne a tort ») avec explication des raisons qui font qu'il s'agit d'un rectangle : les quatre angles droits ou d'autres conditions nécessaires et suffisantes citées ci-dessus (il ne suffit pas de dire que les côtés sont parallèles ou isométriques deux à deux)

3 Réponse correcte, mais incomplète, le rectangle est trouvé et dessiné en déclarant que c'est le seul, mais sans explication des raisons qui font qu'il s'agit d'un rectangle

ou dessin du rectangle CHGE avec explications des raisons qui font qu'il s'agit d'un rectangle, mais sans dire qu'il n'y en a pas d'autre

2 Dessin du rectangle CHGE en disant qu'Anne peut dessiner un autre rectangle (confondu avec le parallélogramme BJFD

1 Dessin du rectangle CHGE et d'autres parallélogrammes

ou seulement dessin du parallélogramme BJFD

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine: Groupe « Géométrie plane »

9. LOTERIE PALINDROME (Cat. 5, 6, 7)

Dans une loterie, tous les billets ont un numéro différent composé de quatre chiffres allant de 0000 à 9999.
Les billets gagnants sont ceux qui ont un numéro « palindrome », c'est-à-dire ceux dont les quatre chiffres sont dans le même ordre si on les lit de gauche à droite ou si on les lit de droite à gauche.
Exemples : 1221, 0330, 7777, ...
Chaque joueur qui tire un billet gagnant reçoit 250 euros.

Si tous les billets sont vendus, chacun au prix de 4 euros, quel sera le bénéfice de la loterie après avoir récompensé les gagnants ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALIYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération ; recherche systématique de séquences de quatre chiffres palindromes
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a 10000 numéros de quatre chiffres et comment sont composés les numéros « palindromes ».
- Comprendre qu'un palindrome de quatre chiffres est obtenu à partir de tout couple de deux chiffres suivi des deux mêmes chiffres mais en ordre inverse.
- Comprendre alors qu'il y a autant de palindromes de quatre chiffres que de couples de chiffres de 00 à 99, ou autant que de nombres de 0 à 99, donc 100.

Ou : observer que dans un palindrome de quatre chiffres, le premier et le quatrième sont égaux, comme le sont aussi le deuxième et le troisième. Il y a 10 possibilités pour le premier et le quatrième chiffre, chacune combinée avec 10 possibilités pour le deuxième et le troisième chiffre. Il y a alors en tout $10 \times 10 = 100$ palindromes de quatre chiffres.

Ou : dresser un inventaire organisé (par exemple, à partir de : 0000, 0110, 1001, 0220, 2002, 0330, 3003, …) observer qu'il y a 19 numéros palindromes qui contiennent le « 0 », puis 17 autres (à partir de 1111 sans compter 0110 et 1001) qui contiennent le « 1 », 15 autres qui contiennent le « 2 » puis, finalement, 1 numéro non encore pris en compte, 9999 qui contient le « 9 ». La somme $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$ donne le nombre de numéros palindromes de quatre chiffres.

- Conclure que la loterie gagnera 40 000 euros en vendant tous les billets, qu'elle distribuera $250 \times 100 = 25\,000$ euros aux gagnants et qu'elle fera un bénéfice de $40\,000 - 25\,000 = 15\,000$ euros.

Attribution des points

4 Réponse correcte (15 000 €) avec explications ou un inventaire complet

3 Réponse correcte, avec explications incomplètes

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul, dans le dénombrement des palindromes ou dans le calcul du gain
ou réponses 15 250 € ou 16 250 € due à la prise en compte de 99 ou 81 (9×9) palindromes au lieu de 100
ou réponse 15 246 € en ne comptant que 9999 numéros de quatre chiffres ($9999 \times 4 - 99 \times 250$)
ou seulement la réponse « 25 000 € distribués aux gagnants », sans donner le bénéfice

1 Début de recherche correct

0 Incompréhension du problème

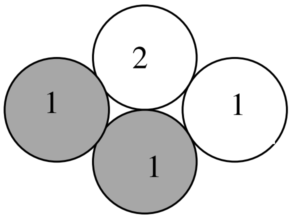
Niveaux : 5, 6, 7

Origine: Siena

10. BLANC OU GRIS (Cat. 5, 6, 7)

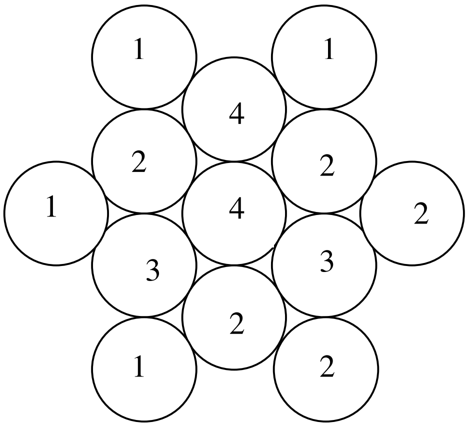
Joëlle a réalisé un premier assemblage avec des jetons gris et des jetons blancs, comme vous pouvez le voir ci-dessous.

Sur chaque jeton, Joëlle a écrit le nombre de jetons gris qui le touchent.



Ensuite, elle a réalisé de la même façon un assemblage plus grand, toujours avec des jetons gris et des jetons blancs. Elle a aussi écrit sur chaque jeton le nombre de jetons gris qui le touchent.

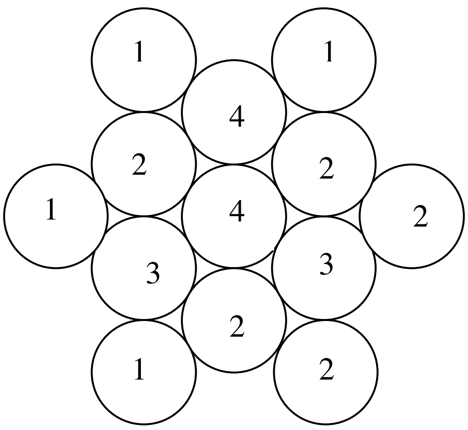
Sur ce nouvel assemblage, on voit les nombres que Joëlle a écrits, mais on ne distingue pas les jetons gris des jetons blancs.

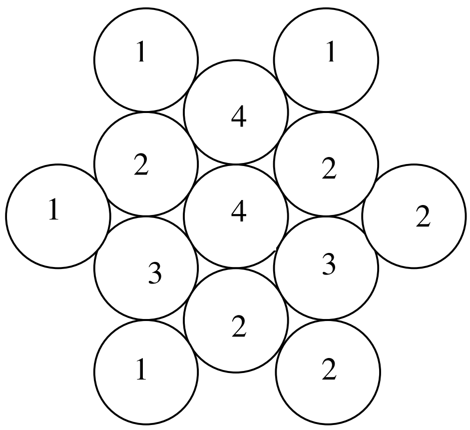


À vous de colorier les jetons gris de cet assemblage.

Présentez deux solutions différentes.

(Utilisez les deux assemblages ci-dessous pour colorier les jetons gris de vos deux solutions.)





ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique et raisonnement, exclusion, déduction

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre inscrit sur un jeton correspond au nombre de jetons gris qui le touchent.
- Procéder par conjectures et ajustements successifs à partir d'un jeton.

  Par exemple, à partir du jeton de gauche noté 1 :

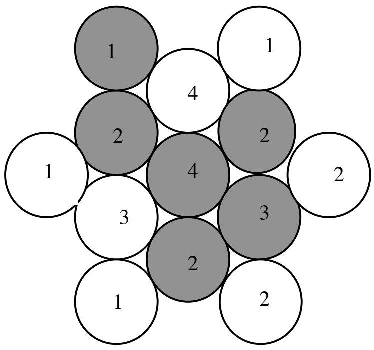
  a) Si on choisit de colorier en gris le jeton noté 3, alors les deux jetons notés 2 qui le touchent seront tous les deux blancs vu qu'ils sont eux-mêmes touchés par un jeton noté 1 (celui de gauche et celui en bas à gauche) qui touche aussi le jeton noté 3. Il faudra alors nécessairement colorier en gris les trois autres jetons (1, 1 et 4) qui touchent le jeton 3. On constate alors que le choix de colorier 3 en gris était une erreur car trois jetons 1, 3, 4 coloriés en gris touchent un jeton noté 2.

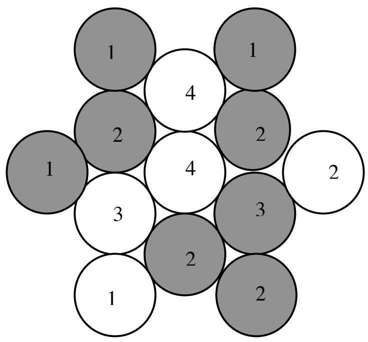
  b) Il faudra donc modifier le choix initial et colorier en gris le jeton noté 2 et laisser le jeton noté 3 en blanc. On sait alors de façon certaine que le jeton noté 4 du haut sera blanc parce qu'il est touché par un jeton noté 1 (en haut à gauche) qui touche déjà le jeton noté 2 qu'on a choisi de colorier en gris. On peut encore savoir avec certitude que le jeton noté 2 au centre en bas doit être colorié en gris.

  On arrive finalement à deux solutions.

Ou : voir que certains jetons ont des couleurs imposées : le 2 tout à droite impose les 2 et 3 qui le touchent en gris, puis le 2 en bas à droite impose le 2 en bas de la colonne du milieu en gris, puis le 1 en bas à gauche impose le 3 à gauche en blanc et le 1 tout à gauche impose le 2 à gauche en gris, enfin le 4 central, déjà entouré de quatre gris, impose le 4 supérieur en blanc. Ainsi, la couleur des six jetons qui entourent le 4 central est imposée.

Il suffit de finir en faisant des conjectures sur la couleur d'un des six jetons extérieurs ou du jeton central. Dans un cas comme dans l'autre, on arrive aux deux solutions.





Ou, travailler par essais et erreurs jusqu'à obtenir une solution.

Attribution des points

4 Les deux solutions

3 Une des solutions ou les 6 jetons « obligés » (autour du centre, voir analyse de la tâche)

2 Au moins 4 des 6 jetons « obligés » (autour du centre) : le 2 à gauche, le 2 en bas colonne du milieu et le 2 et le 3 au milieu de la colonne de droite

1 Au moins 3 jetons gris corrects et pas de jetons gris incorrects

0 Incompréhension du problème

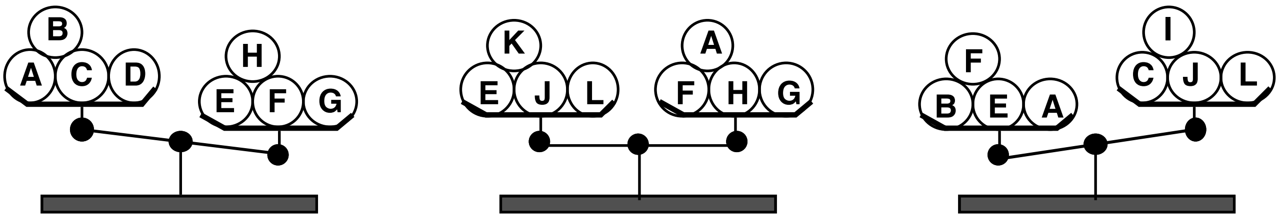
Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Bourg en Bresse (Sur une idée de Rallye MathEsSonne…Ça RaiSonne)

11. BALANCES (Cat. 6, 7, 8)

Mathieu possède douze billes, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J**, **K** et **L**. Elles ont toutes le même poids, sauf une.

Il a effectué trois pesées sur une balance à plateaux, dont voici les résultats :



Quelle est la bille qui a un poids différent des autres ?

Est-elle plus lourde ou plus légère ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : raisonnement déductif, implications, relations d'équivalence

Analyse de la tâche

- Connaître le fonctionnement d'une balance à plateaux (donnée empirique pour les élèves) et en tirer les conséquences sur les figures.
- Comprendre que toutes les billes, sauf une, sont de même masse et que, avec quatre billes sur chaque plateau, la balance peut être équilibrée ou non selon la présence de la bille différente. La deuxième balance étant équilibrée, en déduire que les boules A, E, F, G, H, J, K L sont de même masse et que la boule différente est soit B, soit C, soit D, soit I.
- Examiner alors une balance non équilibrée. Par exemple, la première permet de dire que le plateau de gauche est plus léger et qu'il contient trois des quatre billes qui pourraient être différentes : B, C et D alors que celui de droite contient quatre billes « normales ». En déduire que B ou C ou D est plus légère.
- La troisième balance avec la bille B sur le plateau de gauche et la bille C sur le plateau de droite qui peuvent l'une ou l'autre être différente des autres et envisager les deux possibilités : B est plus lourde ou C est plus légère. La première de ces possibilités est à exclure en fonction de l'examen de la première balance (si B était la bille différente, elle serait plus légère). Il faut donc accepter la seconde possibilité : c'est C qui est la bille différente, et plus légère en fonction de la première balance.

Ou : observer que la bille différente doit figurer tant dans la première que dans la troisième balance et donc être la bille B ou la bille C. En outre, elle doit avoir un effet analogue sur les deux balances (se trouver dans le plateau le plus haut si elle est plus légère, dans le plateau inférieur si elle est plus lourde) ; par conséquent, ce ne peut être que la bille C.

Ou : faire une hypothèse sur la boule qui est différente (plus légère ou plus lourde) et vérifier si l'hypothèse est correcte à partir des 3 schémas.

Attribution des points

4 Réponses correctes (C, plus légère) avec une explication claire et détaillée

3 Réponse correcte (C) sans indiquer que C est plus légère, avec explication claire
ou réponses correctes (C, plus légère) avec explication incomplète

2 Réponses correctes sans explication
ou démarche acceptable avec une erreur qui conduit à une conclusion erronée

1 Début de recherche cohérent

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : 5e RMT. F 12.

12. QUADRILLAGE I (Cat. 6, 7, 8)

« Aujourd'hui, je vous propose une recherche en géométrie », dit le professeur en entrant dans la classe. « J'ai préparé pour chacun de vous une feuille rectangulaire de 36 cm sur 27 cm exactement.

Vous allez la quadriller en respectant les deux règles suivantes :

- tous les carrés obtenus doivent être identiques et occuper toute la feuille,
- les côtés de vos carrés doivent mesurer au moins 1 cm.

Lorsque vous aurez terminé votre dessin, vous me direz en combien de carrés vous avez partagé votre feuille. »

Après avoir dessiné précisément de nombreux segments en s'aidant de leur règle et de leur équerre, voici les réponses que donnent quelques élèves :

- Antoine: « J'ai partagé ma feuille entière en 108 carrés identiques. »
- Berthe : « J'ai partagé ma feuille entière en 243 carrés identiques. »
- Charles : « J'ai partagé ma feuille entière en 12 carrés identiques seulement, et l'on ne peut pas arriver à moins. »
- Danièle : « J'ai partagé ma feuille entière en 1200 carrés identiques. »
- Ernest : « J'ai partagé ma feuille entière en 48 carrés identiques. »

Quelles sont les réponses que le professeur pourra accepter ? Pourquoi ?

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, division, racine carrée, proportionnalité, multiples communs
- Géométrie : aire du rectangle et pavage

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la mesure de l'aire du rectangle est 36 × 27 = 972 (en cm^2), et qu'on peut ainsi calculer dans les cinq cas l'aire d'un carré :

  A) 972 : 108 = 9 B) 972 : 243 = 4 C) 972 : 12 = 81 D) 972 : 1200 = 0,81 E) 972 : 48 = 20,25

- Se rendre compte qu'il ne suffit pas d'avoir calculé l'aire d'un carré pour juger de la validité de la réponse, mais qu'il faut se demander encore si la longueur du côté est supérieure ou égale à 1 et calculer alors les côtés dans les cinq cas, soit en prenant la racine carrée de l'aire, soit en cherchant par essais un côté qui convient (en le multipliant par lui-même) :

  - pour A, B et C le calcul est mental et donne respectivement des côtés de 3, 2 et 9 (en cm),
  - pour D et E, il faut penser que les longueurs des côtés ne s'expriment pas forcément en nombres entiers et calculer ou essayer pour obtenir respectivement 0,9 et 4,5 (en cm). Éliminer donc la réponse de D (qu'on aurait aussi pu éliminer précédemment sachant que le maximum de carrés est donné par 972 carrés de 1 cm de côté.)

- Se rendre compte finalement qu'il faut encore vérifier si on peut placer un nombre entier de carrés sur la longueur et la largeur de la feuille. Par exemple, pour A, les deux divisions 36 : 3 = 12 et 27 : 3 = 9 conduisent bien à un total de 12 × 9 = 108 carrés ; pour C on obtient 36 : 9 = 4 et 27 : 9 = 3 et 4 × 3 = 12 carrés ; pour E on obtient 36 : 4,5 = 8 et 27 : 4,5 = 6 et 8 × 6 = 48 carrés. En revanche, pour B, on n'a pas un nombre entier de carrés de 2 cm de côté dans la largeur et il faut réfuter la réponse.
- Il ne reste alors plus qu'à vérifier l'affirmation de C qui dit que 12 est le nombre minimum de carrés. (C'est-à-dire des carrés de 9 cm de côté : 3 dans la largeur et 4 dans la longueur). Il suffit de vérifier que pour avoir moins de 12 carrés, il faudrait essayer d'en placer 2 ou 1 dans la largeur, ce qui n'est pas possible car 27 : 2= 13,5 qui ne divise pas 36 et 27 : 1 = 27 ne divise pas 36.
- En conclure que A, C et E donnent donc une réponse acceptable, B et D non.

Attribution des points

4 Réponse entièrement correcte (oui pour A, C, E; non pour B, D),) avec justification pour les cinq cas

3 Réponse entièrement correcte mais les justifications sont incomplètes

2 Une erreur dans les réponses, (par exemple rejet de E par des élèves qui cherchent des nombres entiers pour les longueurs des côtés des carrés), justification des quatre autres cas

1 Deux erreurs dans les réponses

0 Plus de deux erreurs ou incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8 **Origine :** Adaptation du problème *Carrelages* (10e RMT.I.13)

13. LES NOMBRES DE MONSIEUR TRAPÈZE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Monsieur Trapèze écrit les nombres naturels depuis 0, très régulièrement, en lignes et en colonnes, dans cette disposition en forme de trapèze :

						0	1	2					
					3	4	5	6	7				
				8	9	10	11	12	13	14			
			15	16	17	18	19	20	21	22	23		
		24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	
	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...			

Arrivé à 44, il fait une pause et constate qu'il est à la 6e ligne, où il manque encore trois nombres.
Il décide d'écrire en tout 30 lignes complètes.

Quel sera le dernier nombre qu'il écrira dans sa 30e ligne ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : suite de nombres naturels, avec découverte de régularités
- Algèbre : fonctions, calcul littéral

Analyse de la tâche

- Comprendre la règle de construction et éventuellement compléter la sixième ligne, voire la septième. (En procédant ainsi, ligne par ligne et en s'armant de patience, on peut arriver au dernier nombre de la 30e ligne (959), avec vraisemblablement plusieurs erreurs.)

Ou : rechercher des régularités pour passer d'un terme au suivant d'une suite choisie qui traverse le trapèze de ligne en ligne (dans une colonne : + 4 ; + 6 ; + 8 ; + 10 ; + 12 ; ... ; parallèlement au côté droit du trapèze : + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11 ; ... ; parallèlement au côté gauche du trapèze : + 3 ; + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11 ; ...) et compléter un à un les termes de la suite où la régularité a été observée, jusqu'à la 30e ligne. (Cette procédure répétitive est aussi sujette à des erreurs ou inattentions.)

Ou : passer à des calculs de sommes de 30 termes issues des régularités observées. Par exemple, le 30e nombre de la colonne centrale est : $1 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 60 = 929$, puis, comme dans la 30e ligne, il y a 61 nombres, celui du milieu est suivi des 30 entiers suivants. Le dernier nombre de la 30e ligne est donc $929 + 30 = 959$.

Ou : transformer des sommes de 30 termes en produits. Par exemple, la suite des termes du côté gauche donne comme dernier terme : $2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) + 33 =$

$2 + 66 + 66 + ... 66 + 33 = 2 + 14 \times 66 + 33 = 35 + 924 = 959$.

Ou : généraliser l'une ou l'autre des régularités observées précédemment par une procédure fonctionnelle.

Par exemple, la plus simple est d'identifier le deuxième nombre de la ligne n par n^2 ; ou observer que la colonne du « 2 » contient les nombres de la forme $n(n + 1)$ ...

Par exemple, comme le 2e nombre de la ligne n est n^2, on peut aller à la 31e ligne, trouver $31^2 = 961$, puis « reculer » de 2 pour arriver au dernier nombre de la 30e ligne : 959.

Pour toutes ces procédures, on peut faire appel à des tableaux ou listes organisées.

Attribution des points

4 La réponse 959 avec explication de la démarche (pas à pas, par suite, par fonction ...)

3 La réponse 959 sans explication ou avec une démarche peu claire
ou une démarche clairement exprimée mais avec une seule erreur de calcul (addition, confusion avec la ligne précédente ou suivante ...)

2 Découverte explicite de nombres de la dernière ligne mais erreurs successives au sein de la ligne

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : Problème inspiré d'anciens problèmes: « nombres en spirales », configurations de nombres naturels, ...

14. DEVINEZ LE NOMBRE (Cat. 7, 8, 9, 10)

J'ai pensé à un nombre entier de deux chiffres, différents de 0. Je vous donne les informations suivantes, mais sachez que l'une d'entre elles est fausse !

1. Les deux chiffres du nombre sont impairs.
2. Entre le nombre auquel j'ai pensé et celui qu'on obtient en intervertissant l'ordre des deux chiffres, il y a une différence de 27.
3. C'est un nombre pair.
4. Ce nombre est divisible par 3 mais pas par 9.

Devinez le nombre de deux chiffres auquel j'ai pensé.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : valeur positionnelle, régularités dans l'écriture de nombres, divisibilité
- Logique : raisonnement hypothético-déductif
- Algèbre : calcul littéral

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que les informations 1 et 3 sont contradictoires ; donc celle qui est fausse est l'une des deux.
- Comprendre que les informations 1 et 2 sont contradictoires, car la différence de deux nombres impairs est toujours paire. En déduire que 1 est fausse, sinon 2 et 3 seraient toutes les deux fausses.

Ou : écrire à partir de l'information 4, la liste des nombres de deux chiffres divisibles par 3 et non par 9 :
12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48, 51, 57, 60, 66, 69, 75, 78, 84, 87, 93, 96 (30 et 60 peuvent déjà être éliminés puisque les deux chiffres doivent être différents de 0) et chercher parmi eux ceux qui sont compatibles avec deux des autres informations.

- Supposer par exemple que l'information 1 soit vraie, par conséquent la liste se réduirait à : 15, 33, 39, 51, 57, 75, 93 mais aucun de ces nombres ne satisfait l'information 2 (51 - 15 = 36 : 33 – 33 = 0 ; 93 – 39 = 54 ; …). En déduire que l'information 1 est fausse et que l'information 3 est vraie.
- Extraire alors de la liste initiale tous les nombres pairs : 12, 24, 30, 42, 48, 60, 66, 78, 84, 96 et trouver que parmi ceux-ci le seul qui présente une différence de 27 avec son « inversé » est 96.

Ou : établir la liste de tous les nombres de deux chiffres qui diffèrent de 27 de leur « inversé » : 14, 41; 25, 52; 36, 63; 47, 74 ; 85, 58 ; 96, 69 . Observer qu'il s'agit de nombres dont un chiffre est pair et l'autre impair.

Déduire ainsi que les informations 1 et 2 sont également contradictoires et confirmer ainsi que c'est bien la 1 qui est fausse. Considérer par conséquent les nombres pairs des couples précédents (14, 36, 52, 58, 74, 96) et chercher celui qui est divisible par 3 mais non par 9, selon l'information 4. Trouver ainsi que le nombre pensé est 96.

Ou : utiliser l'écriture polynomiale des nombres, exprimer le nombre pensé par $10x + y$ et son « inversé » par $10y + x$. Selon l'information 2, établir l'égalité $27 = 10x + y - (10y + x) = 9x - 9y = 9(x - y)$, d'où $x - y = 3$. En déduire que les deux chiffres du nombre pensé sont l'un pair et l'autre impair et procéder comme dans le cas précédent.

Ou : écrire le nombre xy avec x impair et y pair d'après 2 et 3 et utiliser la règle de divisibilité par 3 et non par 9 de la somme $x + y$, où $x = 1, 3, 5, 7$ ou 9 et $y = 2, 4, 6$ ou 8. On trouve trois possibilités : 12, 78, 96, seule 96 convient d'après la règle 2.

Attribution des points

4 Réponse correcte (96) avec explications

3 Réponse correcte (96) sans explication ou explications confuses

2 Recherche non aboutie mais découverte que la première information est fausse

1 Début de recherche correcte avec au moins la découverte que l'indication fausse est à rechercher entre la 1e et la 3e

0 Incompréhension du problème

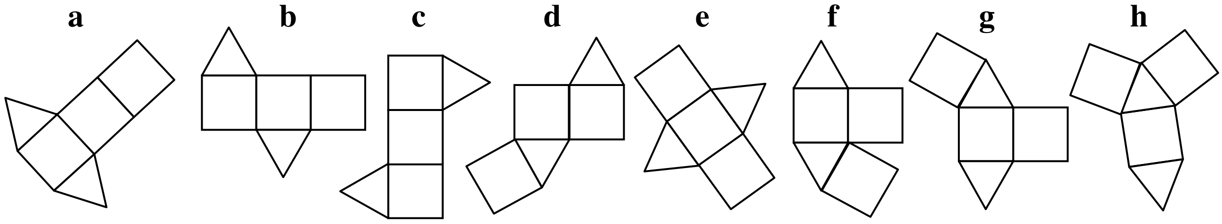
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

15. DÉVELOPPEMENTS D’UN PRISME (Cat. 8, 9, 10)

Pour le 17e RMT, les élèves de la classe d’Antoine avaient dû chercher les différents développements d’une pyramide à base carrée, mais ils ne les avaient pas tous trouvés !
Aujourd’hui, ils doivent trouver tous les développements d’un prisme dont les deux bases sont des triangles équilatéraux et les trois autres faces sont des carrés.
Antoine a trouvé ces huit développements :

a **b** **c** **d** **e** **f** **g** **h**



Ses camarades découvrent qu’il n’en a que sept valables, car il y a une figure qui ne convient pas, et qu’il manque encore d’autres figures.

Quelle est la figure fausse ? Pourquoi ?

Dessinez au moins un développement qu’Antoine n’a pas trouvé.

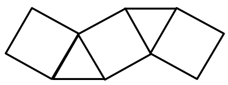
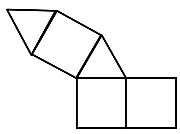
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : prisme, lien entre un développement dans le plan et le solide obtenu par pliage, reconnaissance de figures isométriques planes
- Combinatoire : combinaisons de deux carrés et de trois triangles équilatéraux pour obtenir le solide désiré

Analyse de la tâche

- Vérifier, par découpage ou par déplacements imaginés, que la figure **f** ne convient pas car deux carrés se superposeraient et que les autres figures permettent bien de construire le prisme.
- Chercher un système d’organisation pour retrouver un développement qui manque.
  Par exemple on peut considérer les quatre combinaisons de 3 carrés alignés avec les deux triangles répartis de part et d’autre : **a**, **b**, **c**, **e**, puis deux des combinaisons de 2 carrés alignés avec les deux triangles répartis de part et d’autre et le troisième carré fixé sur un des triangles : **d** et **g**, et enfin une combinaison où aucun des carrés n’est attaché à un autre : **h.** Les deux autres configurations manquantes sont **i** et **j** :

i  **j** 

Attribution des points

4 Réponses correctes (découverte de la figure erronée **f** et d’un au moins des développements manquants, **i** ou **j**) avec une explication pour **f** et un dessin précis du développement manquant
3 Les deux réponses correctes, sans explication pour **f** ou avec un dessin imprécis de **i** ou **j**
2 Une seule réponse correcte (identification de **f** avec explication ou découverte de **i** ou **j)**
1 Identification de **f** sans explication
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Reprise de 17.1.13 *Développement d’une pyramide* (en simplifiant la tâche vu le grand nombre d’échecs).

16. LE DÉ DE MONSIEUR MULTIPLITOUT (Cat. 8, 9, 10)

Monsieur Multiplitout veut construire un dé à 6 faces tel que les règles suivantes soient respectées :
- les nombres écrits sur les six faces sont trois nombres entiers naturels pairs différents et trois entiers naturels impairs différents,
- le produit des nombres écrits sur deux faces opposées est toujours le même,
- ce produit est plus petit que 50 et différent des six nombres écrits sur les faces.

Trouvez tous les choix possibles des six nombres qu'on peut écrire sur les faces du dé.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication et division, diviseurs d'un nombre

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut trouver trois couples de nombres différents dont le produit est le même et différent des six nombres écrits sur les faces, ce qui exclut le 1 parmi les six nombres.
- Comprendre ensuite que le produit cherché doit avoir au moins 6 diviseurs différents de lui-même et de 1, c'est-à-dire au moins 8 diviseurs.
- Entamer une recherche des nombres inférieurs à 50 ayant au moins 8 diviseurs et après quelques essais, se rendre compte qu'il faut examiner la manière dont ces nombres se décomposent en facteurs. (Évidemment tous les nombres premiers sont à écarter. Plus généralement tous les nombres impairs sont à écarter, car une face portant un nombre pair engendre un produit pair.)

  Par exemple, $12 = 2 \times 2 \times 3$ n'a que 6 diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, comme $20 = 2 \times 2 \times 5$, que $16 = 2 \times 2 \times 2$ n'a que 4 diviseurs, etc. En allant un peu plus loin, on trouve des nombres ayant 8 diviseurs comme $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$; $30 = 2 \times 3 \times 5$; $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$, ... et d'autres à plus de 8 diviseurs comme $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ (9 diviseurs), ... $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ (10 diviseurs).

  L'inventaire est vite fait, il n'y a que 6 produits à envisager : 24, 30, 36, 40, 42, et 48.
- Choisir parmi les nombres ayant au moins 8 diviseurs et inférieurs à 50 ceux qui ont trois diviseurs impairs et trois pairs, différents de 1 et du produit. Il n'y en a que deux : $30 = 2 \times 3 \times 5$ avec 2, 3, 5, 6, 10, 15 et $42 = 2 \times 3 \times 7$ avec 2, 3, 6, 7 14, 21.

Ou : se rendre compte que si l'on cherche 3 nombres pairs et 3 nombre impairs, tels que le produit de deux nombres de faces opposés soit constant, le produit de 2 nombres écrits sur 2 faces opposées doit être pair.

Parmi les nombres pairs inférieurs à 50, on peut rechercher ceux qui ont 2 diviseurs impairs premiers.

On trouve ainsi 30, qui a 3 et 5 comme diviseurs premiers impairs (ce qui donne comme 3^e nombre impair 15) et dont les diviseurs pairs sont 2, 6 et 10 ; puis 42 qui a 3 et 7 comme diviseurs premiers impairs (ce qui donne comme 3^e nombre impair 21) les diviseurs pairs étant 2, 6 et 14.

En partant du plus grand nombre impair, on constate que le plus petit nombre pair conduisant à un produit inférieur à 50 est 2 ($15 \times 2 = 30$ et $21 \times 2 = 42$).

- Vérifier qu'avec 11 on obtiendrait un produit supérieur à 50.

Attribution des points :

4 Les deux solutions (2, 3, 5, 6, 10, 15) et (2, 3, 6, 7, 14, 21), avec explication claire

3 Les deux solutions avec explication incomplète,
ou les deux solutions expliquées mais accompagnées d'une 3^e solution erronée

2 Les deux solutions correctes sans aucune explication
ou une solution (avec explication) sans solution erronée

1 Une seule solution sans explication ou début de démarche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Luxembourg

17. LE MARATHON DE TRANSALPIE 2010 (Cat. 8, 9, 10)

Michel et Philippe sont au départ du célèbre Marathon de Transalpie qui, cette année encore, se déroule à Transalpinia. Ils arborent fièrement leurs numéros de dossard.

- le numéro de Michel est un nombre de quatre chiffres, tous différents,
- le numéro de Philippe est aussi un nombre de quatre chiffres, les mêmes que ceux du numéro de Michel,
- la somme des nombres sur les dossards de Michel et de Philippe est 10 000.

Quels peuvent être les numéros des dossards de Michel et de Philippe?

Donnez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : chiffre, nombre, notation positionnelle, décomposition d'un nombre en sommes de deux termes, algorithme de l'addition
- Logique : hypothèses et déductions à partir de l'analyse des cas possibles

Analyse de la tâche

- Comprendre que la détermination des nombres de Michel et Philippe, qui ne se distinguent que par l'ordre de leurs quatre chiffres, nécessite de passer par l'addition des deux dont la somme est 10 000.
- Procéder systématiquement à partir de la colonne des unités et se rendre compte que les deux chiffres des unités ont pour somme, soit 10, soit 0 (0 + 0)
- Constater par quelques essais que les couples des chiffres des unités dont la somme est 10 : 1-9, 2-8, 3-7, 4-6, 5-5 entraînent un report de 1 sur les colonnes suivantes et que les chiffres des dizaines, centaines, milliers devraient être des couples dont la somme vaut 9. Mais ceci ne permet pas de trouver deux nombres avec les quatre mêmes chiffres dont la somme est 10 000.

  Quelques exemples sont présentés ci-dessous : les deux premiers proposent le couple 6-4 pour les unités, qui exigent nécessairement dans deux autres colonnes les couples 4-5 et 3-6. On constate ainsi qu'on ne peut pas continuer sans enfreindre les consignes. Dans le troisième exemple, on part du couple 5-5 : il faut alors dans les colonnes des dizaines et des centaines le même couple de chiffre en ordre inversé dont la somme est 9 (ici 8 et 1, qui pourraient être remplacés par 7 et 2 ou 6 et 3). À ce point la seule possibilité pour la colonne des milliers est d'utiliser le couple 0-0, ce qui ne convient pas car les nombres sont de quatre chiffres, de somme 10 000.

/	3	**4**		**6**	+
/	**6**	5		**4**	=
1	0	0	0	0	

/		3	**4**	**6**	+
/		**6**	5	**4**	=
1	0	0	0	0	

/	0	1	8	**5**	+
/	0	8	1	**5**	=
	1	0	0	0	

- Se rendre compte que, dans le cas où les deux chiffres des unités sont « 0 », la seule manière de procéder, ainsi que nous l'avons observé ci-dessus, est de placer les « 5 » dans la colonne des dizaines et d'utiliser pour les colonnes des centaines et des milliers un même couple de chiffres dont la somme est 9, en ordre inversé : 8-1, 7-2, 6-3 (les seuls qui ne contiennent ni le « 0 » ni le « 5 »).
- Dresser finalement l'inventaire des possibilités : **1850 - 8150** ; **2750 - 7250**, **3650 - 6350**.

Attribution des points

4 Solution complète (les trois couples de nombres : 1850 - 8150 ; 2750 - 7250; 3650 - 6350) avec explication claire

3 Solution complète avec explication peu claire ou incomplète

2 Un ou deux des couples corrects trouvés avec explication claire

ou, les trois couples sans aucune explication

1 Une des solutions au moins, mais avec d'autres couples qui ne respectent pas une des conditions

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

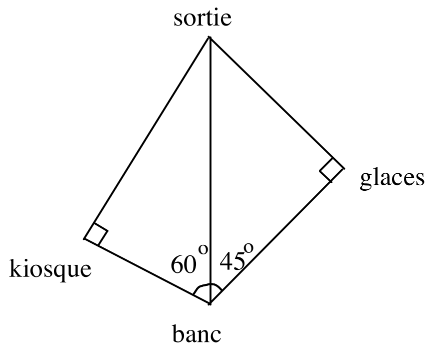
Origine: Siena

18. PROMENADE DANS LE PARC (Cat. 9, 10)

Cette figure représente les sentiers d'un parc.
La distance en ligne droite du banc à la sortie est de 200 mètres.
Anne et Claudio sont sur le banc et vont quitter le parc.
Pour arriver à la sortie, Anne veut passer s'acheter une glace alors que Claudio veut prendre un journal au kiosque.

Les parcours d'Anne et de Claudio seront-ils de la même longueur?

Justifiez votre réponse.



(Le dessin n'est pas à l'échelle.)

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : triangle équilatéral et carré (diagonale) triangle rectangle isocèle et leurs propriétés
- Mesures : calcul de longueurs et approximations
- Algèbre : comparaison de racines carrées

Analyse de la tâche

- Analyser les deux triangles et comprendre que BKS, rectangle, est demi-triangle équilatéral, et par conséquent son côté BK mesure 100 m (moitié de BS) ; BGS est rectangle isocèle (demi carré de diagonale BS).
- Calculer la longueur KS par Pythagore ou en se souvenant de la formule pour la hauteur d'un triangle équilatéral.
  KS = $100\sqrt{3}$ en m. [$\sqrt{(200^2 - 100^2)} = \sqrt{(30000)}$]
- Calculer la longueur des côtés du carré de diagonale BS = 200 : BG = GS = $200/\sqrt{2} = 200\sqrt{2}/2 = 100\sqrt{2}$;
  ou, par Pythagore $x^2 + x^2 = 200^2 \Rightarrow x = \sqrt{200}$
  Trouver alors les parcours, en mètres, d'Anne, $100\sqrt{2} + 100\sqrt{2} = 200\sqrt{2}$ et de Claudio, $100 + 100\sqrt{3}$
- Pour confronter les longueurs des deux parcours procéder selon l'une des façons suivantes :
  - par approximations de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ trouver pour Anne $200\sqrt{2} \cong 280$ et pour Claudio $100 + 100\sqrt{3} \cong 270$
  - par calcul formel, par exemple : diviser les deux expressions par 100 et arriver à $2\sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{3}$; les élever chacune au carré pour obtenir 8 et $4 + 2\sqrt{3}$; enlever 4 pour obtenir 4 et $2\sqrt{3}$; diviser par 2 pour arriver finalement à 2 et $\sqrt{3}$. En conclure que la première est plus grande que la seconde.

(Dans l'activité en classe, ce problème permet de travailler les comparaisons de radicaux, non pas seulement en soi mais pour la recherche d'une solution et permet aussi de travailler avec des nombres comme $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Si les élèves mesurent directement les distances sur un dessin « précis », ils auront de la peine à se prononcer sur la comparaison, ce qui peut constituer une motivation pour le recours aux instruments mathématiques adéquats.)

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (non, Anne a un parcours plus long : $200\sqrt{2} > 100 + 100\sqrt{3}$) avec démonstration de l'inégalité ou par une approximation d'environ 280 et 270 (en mètres), avec explications cohérentes et correctes de la procédure entière

3 Les deux réponses correctes (non, Anne a un parcours plus long : $200\sqrt{2} > 100 + 100\sqrt{3}$) mais sans démonstration de l'inégalité ou par une approximation d'environ 280 et 270 (en mètres), dont l'explication est incomplète

2 Un seul parcours calculé correctement avec explications
ou deux parcours sans aucune explication
ou les deux réponses obtenues par mesures sur un dessin très précis et indication des approximations

1 Procédure correcte, mais erreurs de calcul

0 Incompréhension du problème ou réponses qui ne tiennent pas compte de l'approximation des mesures
ou réponses obtenues par mesures sur la figure donnée

Niveaux : 9, 10

Origine: Gruppo Zeroallazero

19. QUADRILLAGE II (Cat. 9, 10)

« Aujourd'hui, je vous propose une recherche en géométrie », dit le professeur en entrant dans la classe.

« J'ai préparé pour chacun de vous une feuille rectangulaire de 36 cm sur 27 cm exactement.

Vous allez la quadriller en respectant les deux règles suivantes :

- tous les carrés obtenus doivent être identiques et occuper toute la feuille,
- les côtés de vos carrés doivent mesurer au moins 1 cm.

Lorsque vous aurez terminé votre dessin, vous me direz en combien de carrés vous avez partagé votre feuille. »

Après avoir dessiné précisément de nombreux segments en s'aidant de leurs règles et de leurs équerres, voici les réponses que donnent quelques élèves :

- Françoise : « J'ai partagé ma feuille entière en 27 carrés identiques. »
- Gertrude : « J'ai partagé ma feuille entière en 48 carrés identiques. »
- Henri : « J'ai partagé ma feuille entière en 972 carrés identiques et votre problème a 9 solutions. »
- Isidore : « J'ai partagé ma feuille entière en 588 carrés identiques. »

Que pensez-vous de chacune de ces réponses ?

Lesquelles le professeur va-t-il pouvoir accepter ? Pourquoi ?

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, division, racine carrée, proportionnalité, multiples communs
- Géométrie : aire du rectangle et pavage

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la mesure de l'aire du rectangle est 36 x 27 = 972 (en cm^2), et qu'on peut ainsi calculer dans les quatre cas l'aire d'un carré :

  F) 972 : 27 = 36 ; G) 972 : 48 = 20,25 ; H) 972 : 972 = 1 ; I) 972 : 588 = 81/49 ≈ 1,653...
- Se rendre compte qu'il ne suffit pas d'avoir calculé l'aire d'un carré pour juger de la validité de la réponse, mais qu'il faut se demander encore si la longueur du côté est supérieure ou égale à 1 ; ce qui est le cas pour les quatre élèves, F) 6 ; G) 4,5 ; H) 1 et I) 9/7 (le calcul de cette dernière racine carrée peut poser des problèmes à ceux qui ignorent l'existence des nombres rationnels).
- Se rendre compte finalement qu'il faut encore vérifier, dans le cadre géométrique, si on peut placer un nombre entier de carrés sur la longueur et la largeur de la feuille. Pour F, ce n'est pas possible (36 : 6 = 6 mais 27 : 6 = 4,5 n'est pas entier) ; pour G on obtient 36 : 4,5 = 8 et 27 : 4,5 = 6 ce qui correspond bien à 48 carrés ; pour H c'est évidemment possible ; pour I, il faut de nouveau travailler avec des nombres rationnels et non avec des approximations décimales pour se rendre compte que 36/(9/7) = 28 et 27/(9/7) = 21 ce qui donne bien 588 (28 x 21) carrés.
- Il ne reste alors plus qu'à vérifier les affirmations de H qui dit qu'il a obtenu 972 carrés et que le problème a 9 solutions. La première affirmation est vraie. La seconde affirmation est vraie aussi : à partir des 12 carrés les plus grands possible (de côté 9), on peut procéder systématiquement en partageant chacun d'eux en 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 et 81 carrés, pour obtenir les 9 possibilités pour les nombres totaux de carrés : 12, 48, 108, 196, 300, 432, 588, 768 et 972. (On peut aussi présenter cet inventaire au moyen d'un tableau).
- Finalement, le professeur peut accepter les réponses de G, H et I, et réfuter celle de F.

Attribution des points

4 Réponse entièrement correcte, (G, H et I mais pas F) avec justification pour les quatre cas : vérification que les côtés contiennent un nombre entier de carrés et indication des 9 solutions pour H

3 Réponse entièrement correcte mais les justifications sont incomplètes

2 Une erreur dans les réponses, justification des trois autres cas

1 Deux erreurs dans les réponses

0 Plus de deux erreurs ou incompréhension du problème

Niveau : 9, 10

Origine : Adaptation du problème *Carrelages* (10.I.13)