Titre	Catégories	Thèmes	Origine
1. Les dés (I)	3 4	Logique : nombre de points noirs cachés sur une photo montrant 4 dés empilés	LU
2. Poissons tricolores	3 4	Combinatoire : coloriages de 9 zones avec 3 fois 3 couleurs, sans contacts	SI
3. Gourmandise !	3 4 5	Géométrie, cases manquantes dans un quadrillage à mailles en losanges	BB
4. Des pochettes surprises	3 4 5	Arithmétique : décomposer 19 en une somme de trois nombres avec contraintes	BB
5. Chocolats pour la loterie	3 4 5 6	Arithmétique : Décomposer 60 en une somme de termes égaux à 5 et 2,5	LU
6. La pêche aux canards	4 5 6	Arithmétique : répartir 18 nombres donnés en 3 ensembles de même somme	RZ
7. Les fleurs	5 6	Arithmétique : décomposer 40 en une somme de 5 nombres avec contraintes	MI
8. Rameaux fleuris	5 6	Arithmétique : décomposer 67 en une somme de 3 nombres avec contraintes	SI
9. Les dés (II)	5 6 7	Logique : trouver le nombre de points noirs cachés quand on voit 4 dés empilés	LU
10. À la cave	6 7 8	Répartition de bouteilles dans des conditionnements de tailles différentes	SI
11. Spirale de carrés (I)	6 7 8	Géométrie : calcul de l'aire d'une spirale construite avec des ½ carrés	gr 0^0
12. À la parfumerie	7 8 9	Comparer les prix de deux liquides par réduction à des unités communes	LO et fj
13. Le partage	7 8 9 10	Proportionnalité : partager une somme de manière équitable	fj
14. Angles et triangles	7 8 9 10	Géométrie : Construction de triangles rectangles sur une grille quadrillée	BB
15. Rue de la République	7 8 9 10	Trouver 2 nombres qui vérifient plusieurs contraintes algébriques	SI
16. La piscine de Thomas	8 9 10	Géométrie : calculs de distances dans un pavage avec des carrés	gr 0^0
17. Triangles de mêmes aires	9 10	Trouver tous les triangles d'aire donnée qui ont 2 côtés de dimensions communes	PR
18. Spirale de carrés (II)	9 10	Géométrie : suite de carrés d'aires doublées, sommes de puissances de 2	gr 0^0
19. Les cercles	10	Géométrie : construction d'un cercle tangent à trois cercles, calcul du rayon	PR

1. LES DES (I) (Cat. 3, 4)

Cette photo montre quatre dés.
On voit seulement quelques points noirs de ces dés sur la photo.
Mais on ne peut pas voir toutes les faces, certains points sont donc cachés.

Combien y a-t-il de points noirs qui ne sont pas visibles sur la photo ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver ce nombre.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique :

- Trouver le nombre de points noirs qui ne sont pas visibles sur une photo montrant quatre dés empilés.

Analyse de la tâche

- Observer les quatre dés sur la photo. Pour chacun d'eux identifier les faces visibles et leurs points et imaginer les autres faces non visibles, en déduire par exclusion les points inscrits sur chacune.
- Par exemple, pour le premier dé en bas à droite, puisque les faces visibles montrent 1, 3 et 5 points, déduire que les points sur les trois faces non visibles sont 2, 4 et 6.
- Pour le décompte des points on peut procéder de plusieurs façons :
  - par exemple, calculer pour chaque dé la somme des points des faces non visibles et ensuite additionner les résultats obtenus (11 + 19+ 12 + 10) ;
  - ou bien trouver la somme des points sur un dé (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21), la multiplier par quatre (84), enlever ensuite la somme des points sur les faces visibles (32).
- Conclure que le nombre total des points non visibles est 52.

Attribution des points

4 Réponse correcte (52) avec des explications claires

3 Réponse correcte, avec des explications incomplètes ou imprécises

2 Réponse correcte sans explication
ou réponse erronée due à une erreur de calcul ou dans la détermination des points sur une ou deux faces cachées, avec une explication claire du déroulement de la recherche

1 Réponse erronée due à plusieurs erreurs de calcul
ou début de recherche correcte

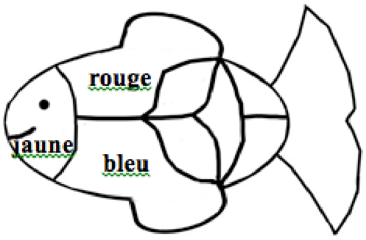
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Luxembourg

2. POISSON TRICOLORE (Cat. 3, 4)

On a commencé à colorier les trois premières zones de ce poisson en partant de la tête, en jaune, rouge et bleu comme le montre ce modèle :



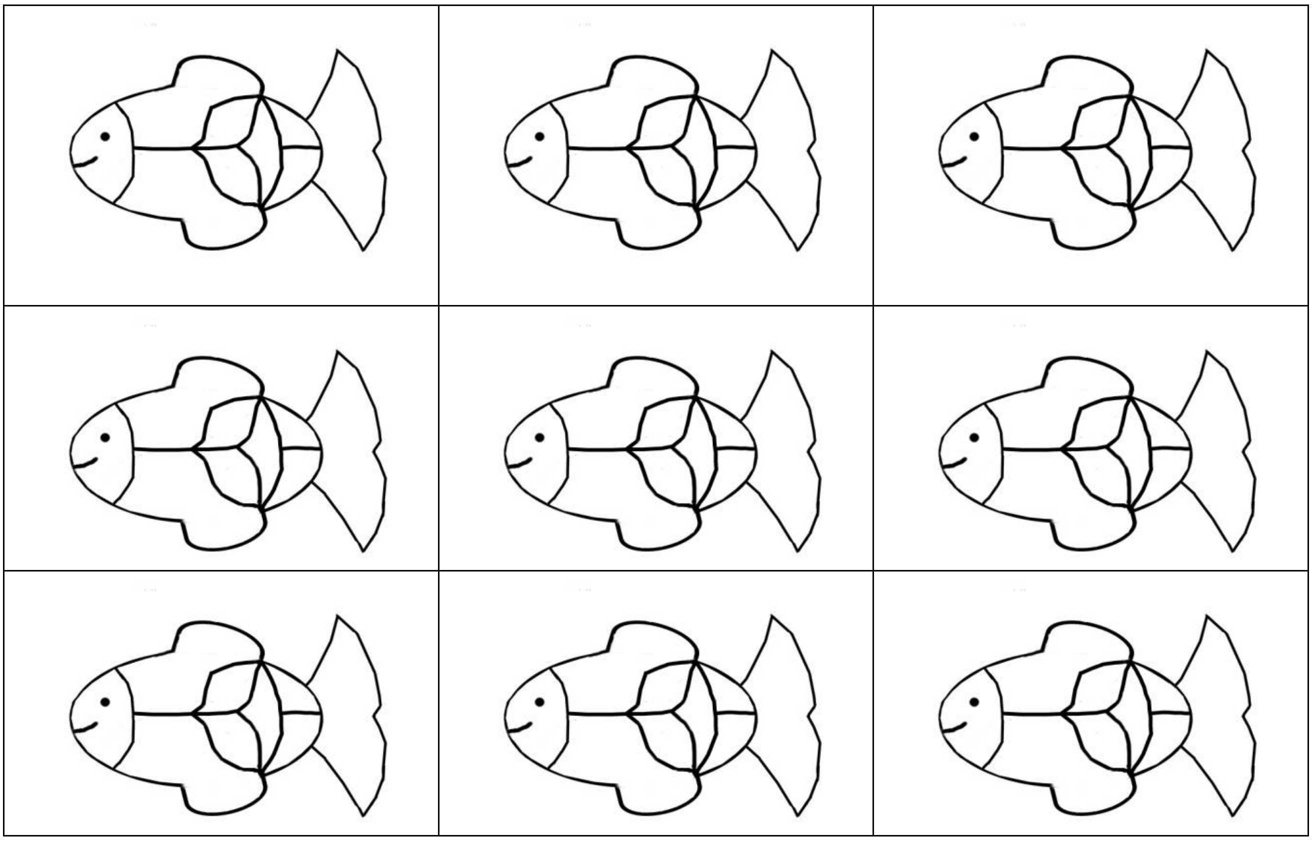
Il faut maintenant colorier les six autres zones en respectant les règles suivantes :

- chaque zone doit être d'une même couleur, jaune, rouge ou bleue ;
- deux zones voisines (qui ont un bord en commun) ne doivent jamais être de la même couleur.

Trouvez toutes les façons différentes de colorier ces six zones du poisson.

Utilisez les dessins ci-dessous en colorant seulement ceux dont vous avez besoin.

(Souvenez-vous que les trois premières zones doivent être coloriées comme indiqué sur le modèle.)



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Trouver toutes les possibilités pour compléter le coloriage du dessin d'un poisson subdivisé en 9 régions, dont 3 déjà coloriées, en employant 3 couleurs différentes, de sorte que des régions limitrophes n'aient pas la même couleur.

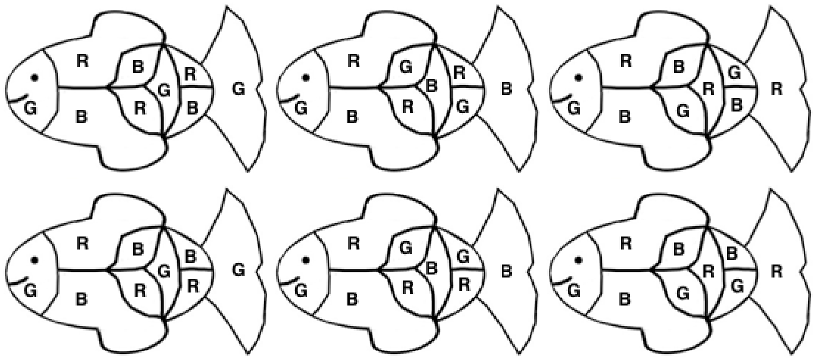
Analyse de la tâche

- Comprendre que le coloriage des poissons est déterminé par les trois régions déjà coloriées et les règles données : il y a trois couleurs ; deux régions limitrophes ne peuvent pas être de la même couleur ;
- Comprendre qu'il faut déterminer le nombre de façons différentes de colorier les poissons en respectant les règles données.
- Procéder systématiquement. On peut suivre plusieurs pistes. Une organisation possible est, par exemple, en notant les trois couleurs avec les lettres J, R, B : après avoir colorié les trois premières régions comme indiqué, il y a trois possibilités de colorier les deux régions limitrophes : B et R, ou J et R, ou B et J.

  Dans le premier cas, la région centrale du corps du poisson doit être J comme celle de la queue, et on aura encore deux possibilités pour les deux régions restantes, c'est-à-dire B et R ou bien R et B.

  Dans le second cas, la région centrale du poisson doit être B comme celle de la queue et les deux régions restantes pourront être coloriées avec J et R ou bien avec R et J.

  Dans le troisième cas, enfin, la région centrale du poisson doit être R comme celle de la queue, et les deux régions restantes pourront être coloriées avec B et J ou bien avec J et B.
- Conclure qu'il y a 6 possibilités différentes pour colorier les poissons en respectant les règles.



(G : giallo, remplace J jaune)

- Ou bien, colorier les poissons sans raisonnement préalable, mais dans ce cas le risque est d'oublier quelques combinaisons ou d'avoir des doubles.

Attribution des points

4 Réponse correcte : les 6 poissons coloriés, sans oubli ni répétitions

3 Coloriages qui respectent les règles avec une seule répétition (7 poissons) ou avec un oubli (5 poissons)

2 Coloriages qui respectent les règles avec deux erreurs : 8 poissons avec deux répétition, 6 poissons avec une répétition et un oubli, 4 poissons avec deux oublis

1 Coloriages qui respectent les règles avec trois oublis ou répétitions

ou présence de coloriages incorrects ne respectant pas la contrainte des trois couleurs ou avec deux zones contiguës de même couleur ou des trois zones déjà coloriées

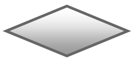
0 Incompréhension du problème ou seulement un ou deux coloriages corrects

Niveaux : 3, 4

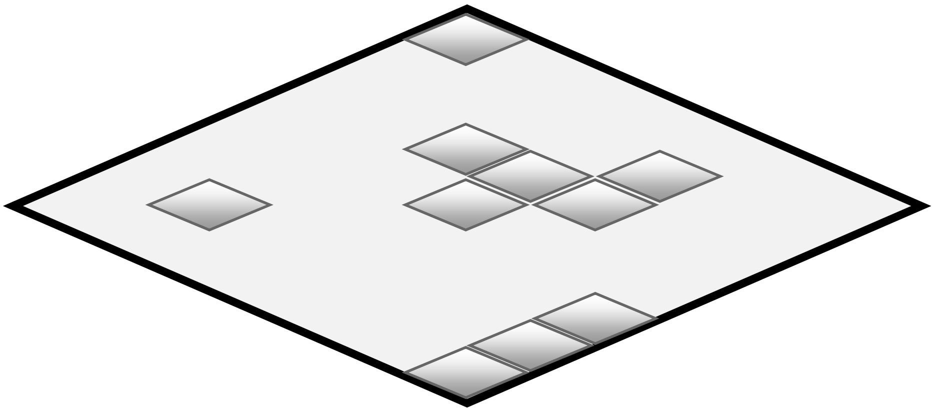
Origine : Siena

3. GOURMANDISE ! (Cat 3, 4, 5)

En début d'après-midi, la grand-mère a offert à sa petite fille Dany et à ses amies une boîte de chocolats qui ont tous cette forme :



La boîte était complètement pleine.
Voici ce qu'il reste dans la boîte quand Dany et ses amies quittent la grand-mère.



Combien de chocolats ont-ils été mangés ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le nombre de cases manquantes dans un quadrillage en forme de losange et dont la maille est un losange.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de trouver le nombre de cases manquantes dans un quadrillage qui n'est qu'amorcé.
- Tracer le quadrillage en prolongeant les côtés des cases déjà dessinées par des droites parallèles aux bords.
- Se rendre compte que sur chaque bord du losange, il y a le même nombre de cases et que le losange comporte *7* rangées de *7* cases chacune.
- Les stratégies de résolution possibles sont :
  - comptage des cases nouvellement tracées (39) ;
  - calcul du nombre total de cases contenues dans le losange (49) et retrait du nombre de cases déjà dessinées (10).

Attribution des points

4 Réponse exacte (39) avec dessin complet ou explications complètes et claires
3 Réponse exacte (39) mais dessin incomplet ou explications incomplètes ou peu claires
2 Réponse (49 : nombre total de cases contenues dans le losange) avec tracé ou explications
ou réponse erronée (38 ou 40) suite à une erreur de dénombrement après tracé
ou réponse erronée consécutive à une erreur de calcul mais démarche correcte
1 Début de tracé ou d'explications attestant de la bonne compréhension du problème
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Bourg en Bresse

4. DES POCHETTES SURPRISES (Cat. 3, 4, 5)

Irma a réparti 19 images dans 3 enveloppes, une jaune, une bleue et une rouge.

Elle a mis plus de 2 images dans chaque enveloppe et chaque enveloppe contient un nombre différent d'images.

C'est l'enveloppe jaune qui contient le moins d'images et l'enveloppe rouge qui en contient le plus.

Combien d'images Irma a-t-elle pu mettre dans l'enveloppe bleue ?

Expliquez comment vous avez trouvé les réponses possibles.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les sommes possibles égales à 19, faites de 3 termes tous différents et supérieurs à 2 puis répertorier toutes les possibilités pour la valeur centrale.

Analyse de la tâche

- Se représenter les trois enveloppes avec chacune des images à l'intérieur, un nombre différent par pochette, pas 1, pas 2 mais 3 ou 4 ou 5 ou …. en tout 19.
- Passer en arithmétique et traduire la situation en une addition de trois termes et une égalité : … + … + … = 19
- Pour les essais, déduire de l'énoncé que le plus petit nombre de la pochette jaune est au moins 3, que le suivant est au moins 4, et que le grand est au plus 12. Se rendre compte aussi, éventuellement qu'on peut organiser les sommes en les liant aux trois couleurs, dans l'ordre jaune, bleu, rouge ou seulement concentrer son attention sur l'enveloppe bleue.
- Dans le premier cas travailler par essais et ajustements en les notant au fur et à mesure et constater qu'il n'y a que 8 possibilités pour répartir les images dans les trois enveloppes

J B R	J B R	J B R
3 + 4 + 12	4 + 5 + 10	5 + 6 + 8
3 + 5 + 11	4 + 6 + 9	
3 + 6 + 10	4 + 7 + 8	
3 + 7 + 9		

Et déduire que dans l'enveloppe bleue, il ne peut y avoir que 4, 5, 6 ou 7 images.

- Dans le second cas, se rendre compte que dans l'enveloppe bleue il y a plus que 3 images.

  Faire des essais avec 4, constater que cela convient (3 jaunes et 12 rouges).

  Faire des essais avec 5, constater que cela est possible en trouvant au moins une des combinaisons suivantes : 3 jaunes et 11 rouges ou 4 jaunes et 10 rouges.

  Faire des essais avec 6, constater que cela est possible en trouvant au moins une des combinaisons suivantes : 3 jaunes et 10 rouges, 4 jaunes et 9 rouges ou 5 jaunes et 8 rouges.

  Faire des essais avec 7, constater que cela convient avec 3 jaunes et 9 rouges ou 4 jaunes et 8 rouges.

  Faire des essais avec 8 et constater que dans ce cas le nombre d'images rouges serait inférieur ou égal à 8, ce qui est impossible.

Attribution des points

4 Réponse correcte (dans l'enveloppe bleue il ne peut y avoir que 4, 5, 6 ou 7 images) avec explications complètes et claires.

3 3 ou 4 des réponses précédentes, avec seulement des vérifications,
ou les 8 répartitions possibles des images dans les enveloppes donnant une somme 19, sans indiquer explicitement le nombre d'images dans l'enveloppe bleue.

2 Réponse correcte (4, 5, 6 ou 7 images) sans explication,
ou bien 2 des réponses précédentes avec vérification

1 Une seule des réponses précédentes

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Bourg en Bresse

5. CHOCOLATS POUR LA LOTERIE (Cat. 3, 4, 5, 6)

Les enfants d'une classe ont organisé une loterie pour la fête de l'école. Ils disposaient de 60 € et voulaient acheter des boîtes de chocolats de deux tailles différentes :
- des grandes boîtes à 5 € chacune
- des petites boîtes à 2,50 € chacune

Ils ont dépensé exactement leurs 60 € et ont acheté le même nombre de grandes boîtes et de petites boîtes.

Combien ont-ils acheté de boîtes de chaque taille ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique :

- Décomposer 60 en une somme de termes « 5 » et « 2,5 », de telle sorte qu'il y ait autant de « 5 » que de « 2,5 ».

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de trouver le même nombre de petites boîtes et de grandes boîtes pour dépenser les 60 euros.

  La tâche dépend de l'information traitée en priorité : même nombre de boîtes ou prix des boites.
- Si on retient en priorité la condition « même nombre de boîtes », il suffit d'associer à chaque petite boîte une grande et de noter la dépense correspondante 7,5 € (5 + 2,5) ; puis de passer à deux ensembles de telles boîtes pour une dépense de 15 €, et continuer ainsi jusqu'à trouver que pour 8 petites boîtes et 8 grandes boîtes, on aura dépensé exactement 60 €. On peut aller un peu plus vite, si l'on observe que le nombre cherché doit être pair, puisque 60 est un nombre entier. Ou, si les élèves maîtrisent la multiplication et la division, compléter la multiplication « à trous » 7,5 × … = 60, ou effectuer la division 60 : 7,5 = 8.
- Si on considère les termes 5 et 2,5 séparément, on peut constater qu'il faudrait de 1 à 11 grandes boîtes ou de 2 à 22 petites boîtes pour arriver à 60 € et que la solution peut être trouvée par essais successifs organisés.

Ou procéder par essais systématiques à partir de 1, ou 5, ou 10 boîtes par exemple.

Ou observer que le coût d'une grande boîte est le double du coût d'une petite boîte, et donc comprendre qu'en divisant la dépense totale par 3, on obtient la dépense pour les petites boîtes (60 : 3 = 20), puis la dépense pour les grandes boîtes (20 × 2 = 40). Conclure que qu'il y a 8 petites boîtes (8 = 20 : 2,5) et 8 grandes boîtes (8 = 40 : 5).

Attribution des points

4 Réponse correcte (8 grandes et 8 petites boîtes) avec une procédure expliquée

3 Réponse correcte, mais avec une procédure peu claire ou insuffisamment expliquée ou seulement une vérification

2 Procédure correcte avec une erreur de calcul ou une réponse correcte sans explication

1 Début de recherche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3, 4, 5, 6

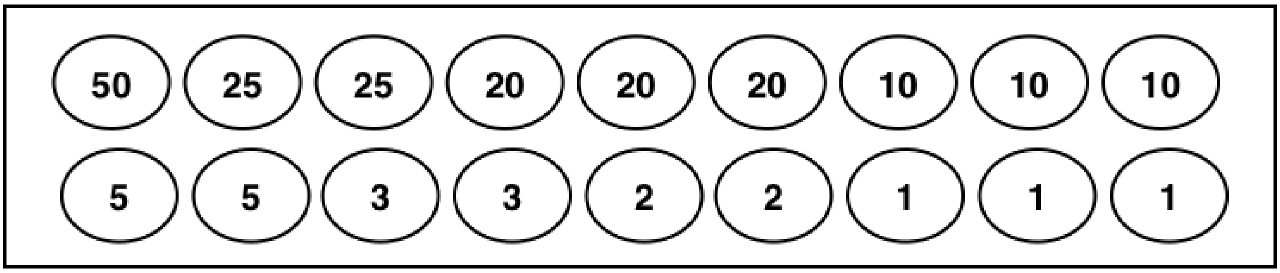
Origine : Luxembourg

6. LA PECHE AUX CANARDS (Cat. 4, 5, 6)

À la fête foraine, Paul, Nina et Camille jouent à « la pêche aux canards ».
Dans un bassin flottent des canards en plastique et sur chaque canard est inscrit un nombre de points. Chaque enfant a pêché 6 canards et a obtenu en tout 71 points.

- Paul avec ses deux premiers canards a obtenu 22 points au total ;
- Nina avec son premier canard a obtenu 3 points.

Les canards pêchés par les 3 enfants portent ces nombres de points :



Lequel des trois enfants a-t-il pêché le canard qui vaut 50 points ?
Expliquez votre raisonnement et indiquez les points des six canards pêchés par chaque enfant.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Étant donnés 18 nombres (une fois 50 ; deux fois 25, 5, 3 et 2 ; trois fois 20, 10 et 1), les partager en trois ensembles de 6 nombres chacun de somme 71, sachant que dans un des ensembles il y a deux nombres dont la somme est 22 et dans un autre il y a au moins un 3.

Analyse de la tâche

- Il y a plusieurs possibilités pour organiser la recherche : en commençant par les informations sur les pêches de Paul et Nina ou bien en essayant de décomposer 71 en sommes de trois termes différents.
- Par exemple, se rendre compte que Paul, en ayant obtenu un total de 22 points pour ses deux premières pêches (20 + 2), doit avoir fait un total de 49 (71–22) avec les quatre autres canards pêchés et qu'il y a une unique possibilité pour obtenir un tel total avec les nombres donnés : 25 + 20 + 3 + 1.
- Éliminer les points 20 – 2 – 25 – 20 – 3 – 1 déjà attribués à Paul et le 3 pêché par Nina. Considérer que pour Nina il y a 68 (71–3) points à réaliser avec 5 pêches. Se rendre compte qu'avec les nombres qui restent, il y a une unique façon d'obtenir 68 comme somme de cinq termes : 50 + 10 + 5 + 2 + 1.

  Donc les points pour Nina sont : 3 – 50 – 10 – 5 – 2 – 1. Nina a donc pêché le canard à 50 points.
- Vérifier enfin que les nombres restants 25 – 20 – 10 – 10 – 5 – 1, les points de Camille, donnent la somme 71.

Ou bien, en cherchant à décomposer 71, procéder par des essais organisés jusqu'à trouver les trois ensembles de nombres compatibles avec les données (deux nombres de somme 22 dans un ensemble et au moins un nombre 3 dans un autre ensemble). Déterminer alors la correspondance entre les trois ensembles de points et les trois enfants.

Attribution des points

4 Réponse correcte (« Nina » avec les trois ensembles de points, Nina : 3 – 50 – 10 – 5 – 2 – 1 ;
Paul : 20 – 2 – 25 – 20 – 3 – 1 ; Camille : 25 – 20 – 10 – 10 – 5 – 1), avec des explication claires

3 Réponse correcte, mais avec des explications peu claires
ou bien, détermination des scores de Paul, Nina et Camille avec des explications, mais sans la réponse « Nina »
ou bien, réponse « Nina » et détermination des points de Paul et de Nina, sans expliciter et vérifier ceux de Camille

2 Procédure cohérente, mais avec une erreur de calcul
ou bien réponse correcte, mais sans explication

1 Début de recherche organisée

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Rozzano

7. LES FLEURS (Cat. 5, 6)

Albert veut répartir 40 fleurs dans deux vases bleus et trois vases rouges de sorte que les vases d'une même couleur contiennent le même nombre de fleurs.

Finalement, Albert se rend compte que dans chaque vase d'une même couleur, il y a 5 fleurs en plus que dans chaque vase de l'autre couleur.

Combien de fleurs Albert a-t-il pu mettre dans chaque vase bleu et dans chaque vase rouge ?

Donnez toutes les solutions possibles et expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer 40 comme somme de 5 termes qui vérifient des contraintes : deux sont égaux entre eux et les trois autres sont également égaux entre eux et la différence entre les termes différents est égale à 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème : les 2 vases bleus contiennent le même nombre de fleurs, les 3 vases rouges contiennent également le même nombre de fleurs, les vases bleus contiennent 5 fleurs de plus ou de moins que les vases rouges.
- Envisager les deux possibilités et pour chacune d'elles calculer le nombre de fleurs par vase en utilisant une des procédures suivantes :

  - Par essais successifs, trouver des nombres dont la différence est 5 en vérifiant que la somme du triple de l'un et du double de l'autre est 40. Par exemple, partir de l'idée qu'un vase bleu a 5 fleurs de moins qu'un vase rouge, choisir 11 comme nombre de fleurs dans un vase rouge, en déduire qu'il y a 6 fleurs ($6 = 11 – 5$) dans un vase bleu puis calculer le nombre total de fleurs $11 \times 3 + 6 \times 2 = 45$, constater que 45 est trop grand ; faire d'autres tentatives jusqu'à arriver à 10 fleurs dans chaque vase rouge et 5 dans chaque vase bleu.

  - Par essais successifs, choisir un nombre de fleurs dans un des deux types de vase, calculer le nombre de fleurs dans l'autre type de vase en partant du fait que le nombre total de fleurs est 40, puis vérifier si la différence est 5.

  - Avec un procédé déductif qui se base sur la différence totale de fleurs entre les vases rouges et les vases bleus : $2 \times 5 = 10$ si les vases bleus ont davantage de fleurs et $3 \times 5 = 15$ si ce sont les vases rouges qui ont plus de fleurs. Cette différence peut être soustraite de 40 pour obtenir une répartition équitable entre les 5 vases. Dans le premier cas $40 – 10 = 30$ puis $30 : 5 = 6$, ce qui correspond au nombre de fleurs dans chaque vase rouge, on en déduit alors que les vases bleus contiennent chacun 11 fleurs. Dans le second cas $40 – 15 = 25$ puis $25 : 5 = 5$ ce qui correspond au nombre de fleurs dans chaque vase bleu, on en déduit alors que les vases rouges contiennent chacun 10 fleurs.

Il y a encore d'autres procédures possibles mais avant de passer aux calculs, si les deux possibilités (plus de fleurs dans les vases rouges ou plus de fleurs dans les vases bleus) ne sont pas envisagées alors on arrivera à une seule solution.

Attribution des points

4 Réponses correctes et complètes : (vases bleus 5 et vases rouges 10; vases bleus 11 et vases rouges 6) avec des explications claires

3 Réponses correctes et complètes : avec des explications peu claires ou incomplètes

ou raisonnement correct et bien expliqué qui mène aux deux couples solutions mais avec une inversion des couleurs

2 Une seule solution avec explication claire

1 Une seule solution sans explication

ou début de raisonnement correct qui mène à un seul des deux couples, avec inversion des couleurs

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Milano

8. RAMEAUX FLEURIS (Cat. 5, 6)

C'est le printemps, Paul et ses camarades de classe ont préparé 26 rameaux fleuris en carton et les ont accrochés aux murs de leur salle de classe.

Il y a 7 rameaux avec une seule feuille et une seule fleur, mais il y a aussi :

- des rameaux avec 2 feuilles et 5 fleurs
- des rameaux avec 4 feuilles et 2 fleurs

Paul se souvient qu'ils ont utilisé 67 feuilles pour préparer tous les rameaux.

Combien y a-t-il de rameaux avec 2 feuilles et combien avec 4 feuilles accrochés aux murs de la salle de classe ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer le nombre 67 en somme de 26 termes parmi lesquels 7 termes « 1 » et 19 autres termes qui sont des « 2 » ou des « 4 », dans un contexte de rameaux avec des feuilles et les fleurs.

Analyse de la tâche

- Lire attentivement l'histoire et se rendre compte qu'il y a 67 feuilles sur 26 brins de trois types : une feuille (avec une fleur), 2 feuilles (avec cinq fleurs), 4 feuilles (avec deux fleurs). Les fleurs sont utilisées uniquement pour décrire les rameaux.
- Simplifier la situation sans les sept branches ayant chacune une feuille et examiner ensuite les 60 (= 67–7) feuilles réparties sur les 19 rameaux en groupes de 4 et en groupes de 2.
- Pour trouver la solution on peut procéder par des tentatives au hasard et progressivement plus organisées. Par exemple, à partir d'un couple de nombres de somme 19, vérifier que le nombre de feuilles est 60 :

  $1 \times 4 + 18 \times 2 = 40$; $2 \times 4 + 17 \times 2 = 42$, … pour arriver à $11 \times 4 + 8 \times 2 = 60$.

Ou bien : enlever les rameaux avec une fleur et une feuille, il en reste 60 à répartir sur 19 rameaux. Considérer que sur chaque rameaux, il y a au moins 2 feuilles donc 38 (19 × 2) feuilles utilisées. Restent 22 (60–38) feuilles à utiliser de manière à obtenir des rameaux avec 4 feuilles. On obtient 11 (22 : 2) rameaux de 4 feuilles et 8 rameaux (19–11) avec 2 feuilles.

Attribution des points

4 Réponse correcte aux deux questions (8 rameaux de 2 feuilles et 11 rameaux avec 4 feuilles) avec une explication claire de la procédure qui permet de réaliser l'unicité de la solution

3 Réponse correcte aux deux questions avec explications incomplètes ou seulement la vérification

2 Mauvaise réponse en raison d'une erreur de calcul, mais avec des explications claires sur la procédure suivie

1 Début de raisonnement correct montrant la compréhension de la situation

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Siena

9. LES DES (II) (Cat. 5, 6, 7)

Voici une photo de quatre dés identiques empilés et appuyés contre un mur ; on ne voit que certains points noirs sur les dés.
Dans la situation réelle, on en verrait d'autres en se déplaçant sans les toucher. Mais il y a encore d'autres points que l'on ne pourrait pas voir, parce qu'ils sont contre le mur ou sur le sol, ou entre deux dés.

Combien y a-t-il en tout de points noirs qui ne peuvent pas être vus, même dans la situation réelle ?

Pour vous aider : *la somme des points sur deux faces opposées d'un dé est toujours 7.*

Expliquez comment vous avez fait pour trouver ce nombre.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique :

À partir d'une photo qui montre quatre dés empilés contre un mur, trouver le nombre de points noirs qui ne peuvent pas être vus par un observateur qui peut se déplacer.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a 3 faces non visibles pour le premier dé en bas à gauche, 5 pour le second dé en bas au centre, 3 pour le troisième dé en bas à droite et 2 pour le quatrième dé en haut.
- Pour compter les points noirs cachés on peut procéder de plusieurs manières :

  - par exemple, observer que pour le premier dé en bas à gauche on voit le 6 et le 4 et donc déduire qu'il cache le 1 et le 3, puis que sur les deux autres faces se trouvent le 5 et le 2. En comparant ce dé avec celui du haut, déduire que sur sa face de gauche il y a le 5 et donc sur celle qui est cachée il y a le 2. (Ce passage est l'obstacle majeur du problème qui peut conduire à l'erreur d'attribuer 2 points à la face de gauche et 5 à celle qui est cachée). En conclure qu'il y a 6 points non visibles sur le premier dé (ou 9 dans le cas de l'erreur signalée).

  - Sur le dé central en bas, seul le 2 est visible donc il y a 19 points cachés (1 + 3 + 4 + 5 + 6).

  - Sur le dé en bas à droite il y en a 12 (2 + 6 + 4).

  - Enfin sur le dé en haut 5 points sont cachés.

  - Conclure que le nombre des points qu'on ne peut pas voir est 42 (6 + 19 + 12 + 5) dans la réalité (ou 45 dans le cas de l'erreur signalée).
- Ou bien, trouver la somme des points sur un dé : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, multiplier par quatre pour trouver 84, le total des points sur les dés, soustraire 42 qui est la somme des points visibles dans la réalité et obtenir 42 comme total des points non visibles (une erreur possible est de soustraire de 84 le nombre 32 des points visibles sur la photo au lieu de la réalité, et obtenir ainsi 52).
- Ou bien : trouver la somme des points sur un dé (21), soustraire de chaque dé la somme des points visibles dans la réalité, puis additionner les résultats obtenus.

Attribution des points

4 Réponse correcte (42) avec des explications claires qui montrent comment les points sont comptés, avec l'explication du choix de 2 points pour la face cachée à la droite du dé de gauche

3 Réponse correcte (42) mais avec des explications incomplètes ou pas claires,
ou bien réponse 45, obtenue en permutant les positions du 2 et du 5 dans le dé en bas à gauche
ou bien deux réponses (42 et 45) avec des explications complètes, dues à l'incapacité d'établir avec certitude combien il y a de points sur la face de gauche du dé en bas à gauche

2 Réponse correcte sans explications,
ou bien réponse fausse due à une erreur dans la détermination des points d'une ou deux faces cachées avec des explications

1 Réponse erronée due à des erreurs dans la détermination des points de trois faces cachées,
ou réponse 52 pour avoir considéré les points visibles seulement sur la photo
ou bien début de recherche cohérente

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Luxembourg

10. À LA CAVE (Cat. 6, 7, 8)

Albert vient de mettre tout son vin en bouteilles. Il doit maintenant placer les bouteilles dans des caisses pour les transporter.

Il a deux sortes de caisses, des grandes et des petites. Pour ranger toutes ses bouteilles, il calcule qu'il lui faudrait exactement 36 grandes caisses. Mais il ne dispose que de 12 grandes caisses.

Il recommence ses calculs et se rend compte que toutes ses bouteilles rempliraient ses 12 grandes caisses et 45 petites caisses. Mais il ne dispose que de 42 petites caisses.

Il remplit toutes les caisses dont il dispose et il lui reste 24 bouteilles en dehors des caisses.

Combien Albert a-t-il rempli de bouteilles avec tout son vin ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer une quantité initiale de bouteilles de vin en sachant qu'elles peuvent être contenues dans 36 grandes caisses ou dans 12 grandes et 45 petites, ou encore dans 12 grandes et 42 petites avec un reste de 24 bouteilles.

Analyse de la tâche

- Comprendre, à la lecture de l'énoncé, qu'il y a des équivalences : « 36 grandes caisses équivalent à 12 grandes caisses et 45 petites » et « 12 grandes caisses et 45 petites équivalent à 12 grandes caisses et 42 petites plus 24 bouteilles ». Par déduction, comprendre que 24 grandes caisses équivalent à 45 petites et que 3 petites caisses équivalent à 24 bouteilles.
- Passer dans le domaine de l'arithmétique, en traduisant ces équivalences par des égalités avec des nombres et des opérations.
- On peut procéder de différentes manières.

  Par exemple, se rendre compte que les 24 bouteilles restantes en dehors des caisses iraient dans les trois petites caisses manquantes (45–42). Comprendre ainsi que dans une petite caisse entrent exactement 8 bouteilles et que le nombre de bouteilles qu'Albert devrait mettre dans les 45 petites caisses est 360 (= 45 × 8). Comprendre que 360 est le même nombre de bouteilles qu'Albert aurait dû ranger dans 24 (= 36–12) grandes caisses et en déduire que chacune des grandes caisses contient 15 (= 360 : 24) bouteilles.
- Conclure qu'Albert a rempli 540 bouteilles (= 15 × 36).

Attribution des points

4 Réponse correcte (540 bouteilles) avec une explication claire et calculs détaillés

3 Réponse correcte (540 bouteilles) avec des explications peu claires ou seulement une vérification

2 Procédure correcte mais réponse erronée à cause d'une erreur de calcul ou réponse correcte sans explication

1 Début de raisonnement correct

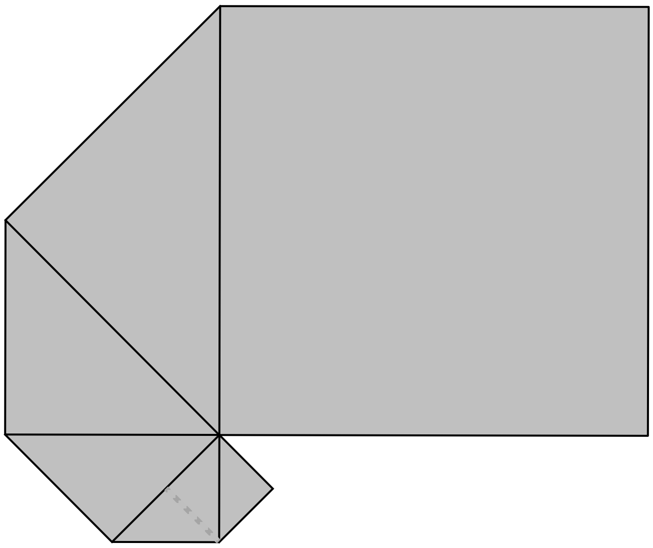
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Siena

11. SPIRALE DE CARRES (I) (Cat. 6, 7, 8)

Jules a superposé exactement six carrés de papier pour former cette figure. Il a commencé par poser un petit carré de 1 cm de côté. Puis un deuxième plus grand qui en cache la moitié, et ainsi de suite. On ne voit entièrement que le plus grand des carrés, le sixième, qui cache la moitié du cinquième, qui cache à son tour la moitié du quatrième …



Jules décide de compléter la spirale en posant encore deux carrés ayant un sommet commun avec tous les autres et chacun cachant la moitié du précédent.

Dessinez la figure obtenue après avoir posé le 8ème carré et calculez la mesure de l'aire de la figure en cm^2 .

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

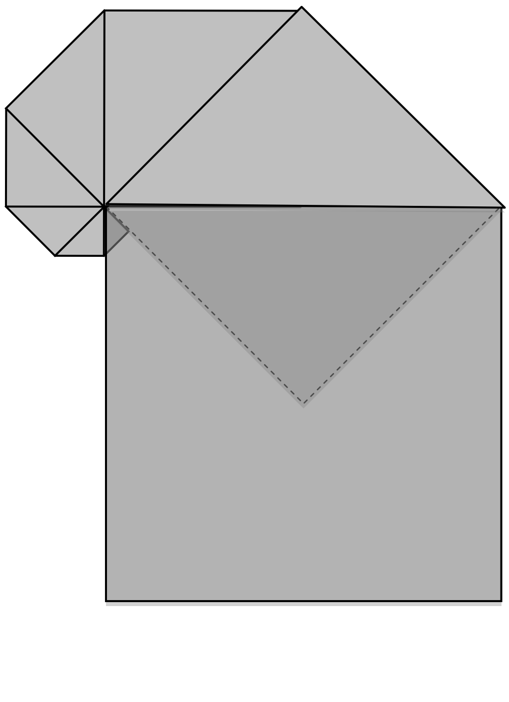
ANALYSE A PRIORI

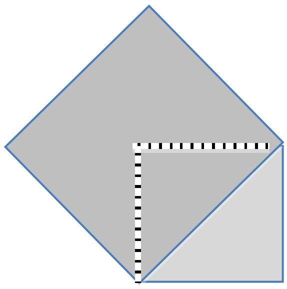
Tâche mathématique

Calculer l'aire d'une figure composée de 8 carrés se chevauchant partiellement, disposés en spirale, l'un des côtés de chacun d'eux coïncidant avec la diagonale du précédent (les 6 premiers carrés sont dessinés ; le côté du 1er carré mesure 1 cm).

Analyse de la tâche

- Analyser le dessin et percevoir les règles de succession des six carrés : le carré de départ, le point commun, la coïncidence d'un côté du nouveau carré avec la diagonale du précédent.
- Compléter le dessin avec le 7ème et le 8ème carré ; comprendre que le 8ème carré recouvre entièrement la moitié visible du 1er carré ; comprendre en regardant le dessin ou bien en considérant la suite des angles de 45° entre un carré et le suivant, que ces 8 angles au sommet commun des carrés forment un tour complet (360°).
- imaginer le premier carré ou en dessiner son contour sous le deuxième, constater alors son découpage en deux triangles rectangles « triangles de base » ; imaginer le deuxième ou en dessiner son contour sous le troisième, constater que lui aussi se décompose en deux triangles rectangles composés chacun de deux « triangles de base ».
- Comprendre alors qu'on obtient l'aire demandée en faisant la somme des aires des demi-carrés (du 2ème au 7ème) et du carré entier (le 8ème).





- Constater que l'aire de chaque carré (ou demi-carré) est le double de l'aire de celui qui le précède (comme le montre la figure). Par conséquent, à partir du 1er carré (non visible) qui a une aire de 1 cm^2, en doublant, on trouve les aires des carrés suivants, et donc de leur moitié, c'est-à-dire des triangles rectangles visibles.
- La somme à calculer, en cm^2, est donc 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 128 ; on obtient 191 cm^2.
- On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore (à partir du niveau 8) pour déterminer la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle rectangle qui est aussi un côté de l'angle droit du triangle rectangle suivant ; ensuite calculer les aires des différents triangles rectangles et de la 8e figure carrée et de leur somme.

Attribution des points

4 Réponse correcte (191 cm^2) avec un dessin et des explications claires qui montrent la compréhension de la construction

3 Réponse correcte (191 cm^2) avec le dessin et des explications incomplètes ou seulement le calcul.

2 Réponse correcte (191 cm^2) sans explications ou réponse erronée à cause d'une erreur (exemple : 191,5 cm^2 en ayant compté le 1er demi-carré),
ou bien réponse 127 cm^2 (127 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64)
ou 127,5 cm^2 (127,5 = 0,5 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) en ne comptant que la moitié du dernier carré

1 Début de raisonnement correct (par exemple : seulement le dessin ou calcul de quelques aires)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Groupe 0^0

12. À LA PARFUMERIE (Cat. 7, 8, 9)

Sophie entre dans une parfumerie acheter son parfum préféré.
Sur une étagère, elle voit deux flacons :

- un de 50 ml au prix de 59 €
- et l'autre de 125 ml au prix de 129 €.

Sur l'étiquette du premier, il est écrit : « *en promo : – 20 % sur le prix affiché* ».
Sur l'étiquette du deuxième : « *offre spéciale : – 10 % sur le prix affiché* ».
Elle décide alors de choisir le flacon qui lui permettra d'obtenir son parfum préféré au prix le plus intéressant au ml.

Quel flacon devra-t-elle choisir : 50 ml ou 125 ml ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer le prix d'un même liquide vendu dans deux flacons de volumes et de prix différents avec deux réductions différentes.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les deux flacons ont une capacité différente, et que le prix proposé dépend de la quantité de parfum que chaque bouteille contient.
- Comprendre que la comparaison doit être faite sur le prix d'une même unité de capacité : 1 ml ou 25 ml.
- Comprendre que les prix indiqués sont à réduire et qu'il faut faire les calculs des nouveaux prix avant la comparaison :

  20% de 59 = 11,8 ; le prix réduit du premier flacon est donc 59 – 11,8 = 47,2 €

  et 10% de 129 = 12,9 ; le prix réduit du deuxième flacon est donc 129 – 12,9 = 116,1 €.
- Pour calculer le prix unitaire on doit choisir l'unité de capacité. La plus pratique pour les calculs est 1 ml, mais la comparaison doit alors être faite sur les centimes d'euros : 47,2 : 50 = 0,944 et 116,1 : 125 = 0,9288 $\approx$ 0,929
- La capacité qui permet de mieux voir la différence est 25ml. On peut comparer le prix de 25 ml de parfum, qui dans le premier cas est 23,60 € (47,2 : 2) alors que dans le second il est 23,22 € (116,1 : 5).
- On peut aussi voir la différence en prenant 1 litre. On peut procéder en multipliant par 1000 les deux prix : 0,944 × 1000 = 944 et 0,9288 × 1000 = 928,8 ou en appliquant un calcul de proportionnalité : 47,2 × 20 = 944 et 116,1 × 8 = 928,8.
- On peut aussi choisir une capacité qui soit multiple de 50 ml et 125 ml soit 250 ml.

  On compare alors le prix de 5 petits flacons, c'est-à-dire 5 × 59 × 0,8 = 236 € et de 2 grands flacons, c'est-à-dire : 2 × 129 × 0,9 = 232,2 €.

Attribution des points

4 Réponse correcte (le flacon ayant le prix le plus intéressant est celui de 125 ml) avec des explications claires et des calculs détaillés

3 Réponse correcte avec des explications peu claires des calculs effectués

2 Réponse "de coût égal" pour avoir trop arrondi le prix d'un ml
ou bien réponse erronée à cause d'erreurs de calcul, mais avec un raisonnement correct

1 Réponse avec un raisonnement cohérent avec les prix affichés, mais sans les remises

0 Incompréhension du problème ou réponse correcte sans aucune explication

Niveaux : 7, 8, 9

Origine : Lodi et fj

13. LE PARTAGE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Angela, Bernard et Charles font une longue excursion en montagne. Dans leurs sacs à dos, ils ont emporté des sandwichs : Angela en a 9, Bernard en a 8 et Charles 7.

Au moment de s'arrêter pour le pique-nique, ils rencontrent un randonneur affamé qui leur propose 15 euros s'ils acceptent de partager leurs sandwichs. Ceux-ci sont alors tous rassemblés et répartis : le même nombre pour chacun des quatre.

Le pique-nique terminé, l'inconnu remercie les trois amis et les laisse se partager les 15 euros.

Charles dit : « nous sommes trois, prenons chacun 5 euros ».

Angela et Bernard lui répondent : « non, ce n'est pas juste, nous avons apporté plus de sandwichs que toi ! »

Comment les trois amis doivent-ils se partager équitablement les 15 euros ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Répartir 15 proportionnellement à trois nombres déterminés d'après le contexte à partir de 7, 8 et 9.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a 24 (9 + 8 + 7) sandwichs à disposition et que chacun en a mangé 6 (24 : 4) et qu'il faut renoncer au partage proposé par Charles qui est manifestement inéquitable.
- Penser à décomposer 15 en trois parts correspondant au nombre de sandwichs et constater qu'il y a deux manières de procéder : choisir les nombres de sandwiches apportés, 9 ; 8 et 7, ou tenir compte des 6 sandwichs que chacun a mangés et partir du nombre de sandwichs que chacun a offert à l'inconnu : 3 ; 2 et 1.
- Comparer les deux manières de procéder et admettre que la deuxième est celle qui correspond aux échanges effectifs et qu'il faut adopter. C'est celle qui ménage l'équité.
- Répartir 15 euros en trois parts correspondant à 3 ; 2 ; 1 : sur les 6 sandwichs donnés à l'inconnu, Angela en a donné 3 et doit avoir les 3/6e de 15 € soit 7,50 €, pour Bernard les 2/6e soit 5 € et pour Charles le 1/6e, soit 2,50 €. (Il faut rejeter les solutions qui se limitent à maintenir égaux les écarts et la somme 15 comme 6 ; 5 ; 4, ou 7 ; 5 ; 3 ou 8, 5, 2 etc. et penser à un partage qui respecte les rapports de proportionnalité).

  On peut aussi penser aux 6 sandwichs offerts pour 15 euros, et calculer le prix d'un sandwich (15 : 6 = 2,5 €) qui est le coefficient de proportionnalité, ou penser à 3 comme la moitié de 6 et trouver les 7,5 € qui sont la moitié de 15 €, etc.

  Le partage est alors 7,50 € pour Angela, 5 € pour Bernard et 2,50 € pour Charles.

  (Au cas où le partage se ferait, de manière erronée, en fonction des nombres 9 ; 8 ; 7, les calculs sont moins évidents. Le prix d'un sandwich serait de 15 : 24 = 0,625 € et les parts de 5,625 ; 5 et 4,375 (en €), proches de la solution qui maintiendrait les écarts de 1, entre les nombres de sandwichs et les euros. : 6 ; 5 ; 4 !)

Attribution des points

4 Réponse correcte 7,50 € pour Angela, 5 € pour Bernard et 2,50 € pour Charles avec des explications

3 Réponse correcte avec des explications insuffisantes

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse Angela 5,625 €, Bernard, 5 € et Charles 4,375 €, sur un partage proportionnel aux nombres de sandwichs apportés, avec explications et calculs clairs

1 Réponse Angela 5,625 €, Bernard, 5 € et Charles 4,375 € sans explication ou explications confuses

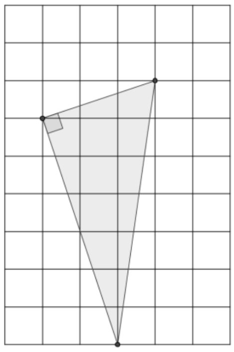
ou démarche qui identifie les grandeurs en jeu et se réfère aux rapports sans arriver à les calculer

0 Réponse qui ne respecte pas la proportionnalité (mais les écarts) ou incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : fj

14. ANGLES ET TRIANGLES (Cat. 7, 8, 9, 10)



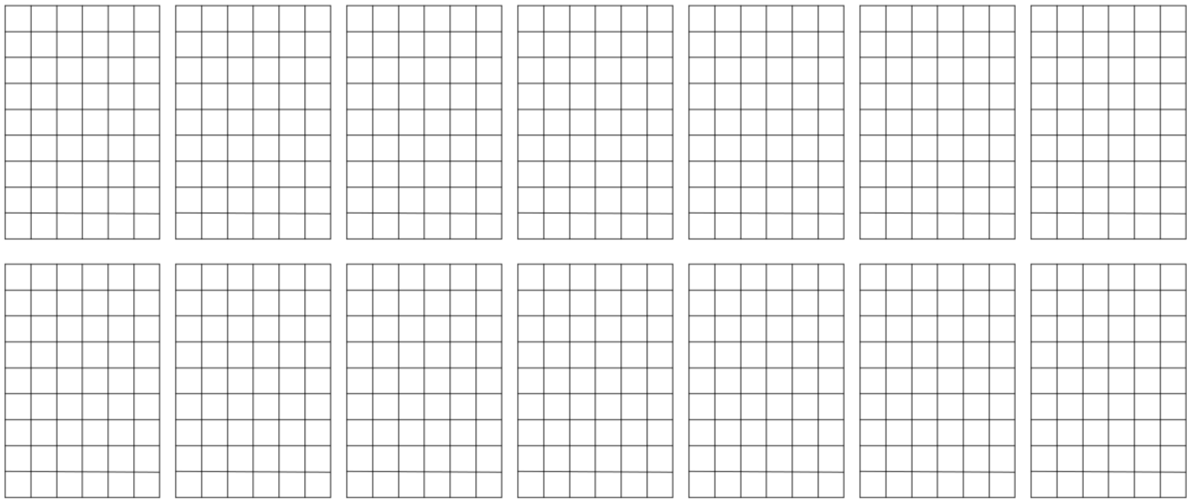
Samia possède des fiches quadrillées de 6 carreaux sur 9 carreaux, elle y dessine des triangles. Tous ces triangles :

- sont des triangles rectangles,
- ont leurs sommets sur des nœuds du quadrillage,
- ont un des côtés de l'angle droit qui mesure le double de l'autre.

Voici l'un des triangles que Samia a dessiné.

Combien Samia peut-elle dessiner de triangles différents ? *(Il ne doit pas y avoir deux triangles qui ont leurs trois côtés de mêmes longueurs).*

Dessinez tous ceux que vous avez trouvés dans les quadrillages ci-dessous.



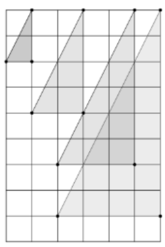
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Sur un quadrillage à mailles carrées, dessiner tous les triangles rectangles possibles avec un côté de l'angle droit double de l'autre, ce qui revient à construire tous les triangles semblables au triangle donné.

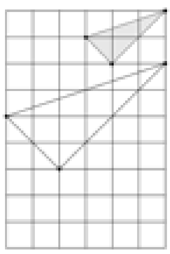
Analyse de la tâche

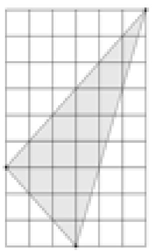
- Comprendre les contraintes et leurs conséquences : les triangles peuvent avoir différentes orientations et les côtés peuvent ou non suivre les lignes du quadrillage.
- Déterminer les longueurs possibles pour respecter la contrainte liée aux dimensions.
- Procéder par tentatives organisées en déterminant tout d'abord les 4 triangles dont les côtés de l'angle droit suivent les lignes du quadrillage.



- Comprendre ensuite comment on trace un angle droit sur un quadrillage.
- Pour les triangles dont les côtés de l'angle droit ne sont pas sur les lignes du quadrillage, se rendre compte que le plus petit côté est la diagonale d'un rectangle formé par le quadrillage et dont les dimensions (en carreaux) peuvent varier ainsi (1 ; 1) (1 ; 2) (1 ; 3) (1 ; 4) (2 ; 2) (2 ; 3) (3 ; 3), si l'on élimine les triangles identiques ou trop grands.
- Poursuivre la recherche en construisant tout d'abord le plus petit côté du triangle et éventuellement à l'aide d'une équerre, dessiner le deuxième côté.

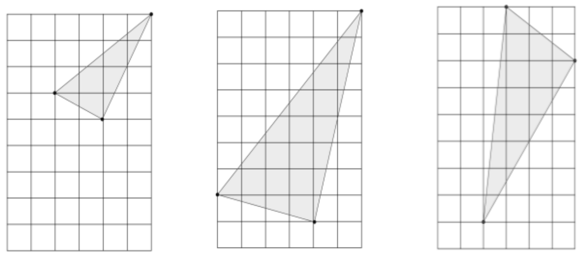
  Vérifier que ce deuxième côté peut mesurer le double du premier et que ses extrémités seront bien sur des nœuds du quadrillage. Il y a trois triangles dont les petits côtés sont des diagonales de carrés.





- Reproduire cette procédure en modifiant méthodiquement l'orientation et la longueur du plus petit côté.
- Éliminer les cas qui amènent à construire un deuxième côté de l'angle droit qui, quelle que soit la position de départ, aurait sa deuxième extrémité à l'extérieur de la grille. Éliminer les triangles superposables.

- Il y a trois triangles dont les petits côtés sont des diagonales de rectangles, non compris le triangle donné dont le petit côté est la diagonale d'un rectangle (1 ; 3).
-



Attribution des points

4 Les 10 triangles différents donnés dans l'analyse (éventuellement comme onzième celui qui est donné dans l'énoncé du problème), bien disposés dans le quadrillage et respectant la relation entre les côtés

3 Au moins 8 triangles corrects différents (sans celui de l'énoncé) et sans triangle erroné,
ou bien 10 triangles corrects différents, mais avec d'autres triangles erronés

2 Au moins 5 triangles corrects différents (sans celui de l'énoncé) et sans triangle erroné,
ou bien au moins 8 triangles corrects différents, mais avec au plus deux triangles erronés

1 Au moins 2 triangles corrects différents (sans celui de l'énoncé) et sans triangle erroné,
ou au moins 4 triangles corrects différents, mais avec des triangles erronés,
ou réponse correcte "10 ou 11 triangles" sans explication ni dessin

0 Moins de 4 triangles corrects ou incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Bourg en Bresse

15. RUE DE LA RÉPUBLIQUE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Laurent et Mathieu sont des amis qui habitent rue de la République.

Un jour, ils constatent que les numéros de leurs maisons présentent certaines particularités :

- ces numéros sont des nombres à deux chiffres différents, mais ils s'écrivent avec les mêmes chiffres ;
- la différence des deux nombres est 18 ;
- la somme des deux nombres est un multiple de 6 ;
- le produit des deux nombres est un multiple de 8.

Quels sont les numéros des maisons de Laurent et Mathieu ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Déterminer deux nombres différents de deux chiffres sachant que le chiffre des dizaines de l'un est le chiffre des unités de l'autre et réciproquement, que leur différence est 18, leur somme est multiple de 6 et leur produit multiple de 8.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes de la situation (avec une contrainte sous-entendue : les deux nombres sont différents) et les interpréter.
- Faire la liste des couples de nombres à deux chiffres différents et tester les trois conditions (utilisation d'un tableur ?)
- Stratégie par raisonnement et inventaire à partir de la condition sur la différence et par essais organisés : tenant compte que la différence des deux nombres est 18, obtenir la liste suivante des couples à étudier : (31, 13) ; (42, 24) ; (53, 35) ; (64, 46) ; (75, 57) ; (86, 68) ; (97, 79). Examiner ensuite si les deux autres conditions sont vérifiées.
- Stratégie par raisonnement et inventaire à partir de la condition sur la somme : recherche des multiples de 6 supérieurs à 30 et inférieurs à 200 : 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78,… et déterminer ceux qui sont sommes de 2 nombres ayant les mêmes chiffres et vérifiant la dernière contrainte. La somme étant multiple de 6, elle est paire et donc les deux nombres sont soit tous deux pairs soit tous deux impairs, mais le produit des 2 nombres étant multiple de 8, il sont nécessairement tous deux pairs et les chiffres ne peuvent être que 2, 4, 6 ou 8.
- Stratégie par raisonnement à partir de la condition sur le produit : le produit étant multiple de 8, on en déduit que l'un des nombres est multiple de 8 ou que l'un est multiple de 4 et l'autre de 2. Faire l'inventaire des nombres possibles et vérifier les autres conditions.
- On peut éventuellement considérer la stratégie suivante, d'abord algébrique, ensuite arithmétique.

  Les deux nombres s'écrivent $\overline{ab}$ et $\overline{ba}$ avec $1 \leq a \leq 9$ et $1 \leq b \leq 9$, en supposant $a > b$.

  Traduire algébriquement que leur différence est 18 : $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9\,(a-b) = 18$, d'où $a-b = 2$. En déduire les couples de nombres possibles (31, 13) ; (42, 24) ; (53, 35) ; (64, 46) ; (75, 57) ; (86, 68) ; (97, 79). Continuer avec une procédure arithmétique en vérifiant pour chaque couple les deux conditions sur la somme et sur le produit. La parité du produit peut être utilisée pour conserver seulement les couples composés de nombres pairs avant de vérifier la condition sur la somme.
- Ou bien traduire algébriquement que leur somme est multiple de 6 :

  $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11\,(a + b) = 6 \times$ n, donc $a + b$ est multiple de 6.

  En déduire les couples de nombres possibles (15, 51) ; (24, 42) ; (39, 93) ; (48, 84) ; (57, 75).

  Continuer avec une procédure arithmétique en vérifiant pour chacun des couples les deux conditions sur la différence et sur le produit.

  Toutes ces stratégies aboutissent à la réponse (24 ; 42).

Attribution des points

4 Réponse correcte (42 ; 24) avec des explications claires de la démarche suivie

3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires de la démarche, mais qui tient compte de toutes les contraintes

2 Réponse exacte sans explications ou sans vérifications de toutes les contraintes

1 Début de raisonnement correct (prise en compte que les nombres ont chacun deux chiffres, que les chiffres sont différents…)

0 Incompréhension du problème

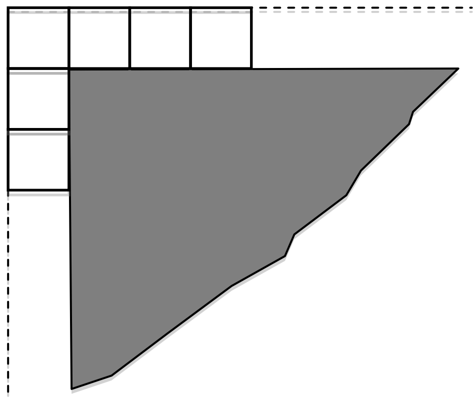
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena (Refonte de « Anniversaires et bougies » 16e RMT F 14)

16. LA PISCINE DE THOMAS (Cat 8, 9, 10)

Autour de sa piscine carrée, Thomas a construit une bordure en alignant des dalles carrées, toutes de mêmes dimensions. Il a choisi ses dalles de manière à pouvoir entourer tout le bassin, sans laisser d'espace entre les dalles et sans que celles-ci ne se chevauchent.

(La figure montre le début de la construction, dans un angle de la piscine, après la pose des six premières dalles.)



Thomas avait commandé quatre palettes de 25 dalles chacune, mais il a dû commander une cinquième palette car il n'arrivait pas à terminer sa bordure avec les dalles des quatre premières palettes.

La construction terminée, Thomas a mesuré le périmètre de la piscine et le périmètre extérieur de la bordure. Celui de la bordure extérieure (tracés amorcés en pointillés sur la figure) mesure 3,60 mètres de plus que le périmètre de la piscine.

Combien mesure le côté d'une dalle ?

Et combien pourrait mesurer le côté du bassin ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer la distance entre deux carrés concentriques dont le périmètre de l'un vaut 3,60 m de plus que celui de l'autre et trouver les longueurs possibles du périmètre du petit carré comprises entre des limites données.

Analyse de la tâche

- Imaginer ou représenter par un dessin les deux carrés, une bordure entière dans un cas particulier, observer la position des dalles des quatre sommets, tout en se rendant compte que le nombre des dalles et leurs dimensions sont l'enjeu du problème.
- Dans une procédure par essais, choisir un certain nombre (N) de dalles par côté (avec ou sans dessin) ; calculer la longueur des deux périmètres (en « côtés de dalles ») pour arriver à 4 × N et 4 × (N + 2) et constater que la différence de 3,60 m correspond à 8 « côtés de dalles » d'où l'on tire qu'un côté de dalle mesure 0,45 m. (Cette procédure peut ouvrir la voie, en cas d'essais répétés, à la perception de la « constance » de la mesure d'un côté de dalle, indépendamment du nombre imaginé (N) de dalles, c'est-à-dire indépendamment de la longueur des côtés de la piscine. Elle peut aussi permettre d'accéder directement à une ou plusieurs réponses à la deuxième question.)
- ou par une procédure géométrique, par addition ou soustraction de segments, constater que l'allongement de 3,60 m correspond aux deux côtés « libres » (non communs avec ceux des dalles voisines), de chacune des quatre dalles des sommets, c'est-à-dire à la longueur de 8 côtés de dalles.
- ou, par une procédure algébrique, avec L et l comme longueurs respectives des côtés des deux carrés, on pose l'équation $4L = 4l + 3{,}60$, qui conduit à $L - l = 0{,}90$. Le côté d'une dalle mesure donc 0,45 m.
- Pour répondre à la deuxième question sur la mesure du côté de la piscine, à partir du « 0,45 » obtenu précédemment, comprendre qu'il faut utiliser les données sur le nombre de dalles (pour se restreindre à quelques solutions seulement) et que le nombre des dalles se situe entre 101 et 125. On peut procéder par essais ou tenir compte du fait que le nombre total des dalles est un multiple de 4 : 104, 108, 112, 116, 120, 124 ; et que sans les dalles des sommets on peut

avoir 25, 26, 27, 28, 29, 30 dalles par côté, donc les longueurs des côtés de la piscine peuvent être (en m) : 11,25 ; 11,70 ; 12,15 ; 12,60 ; 13,05 et 13,50.

Attribution des points

4 Réponses correctes (0,45 m ou 45 cm et les six longueurs possibles en mètres : 11,25 ; 11,70 ; 12,15 ; 12,60 ; 13,05 et 13,50) avec des explications claires

3 Réponses correctes, avec des explications partielles,
ou réponse correcte à la première question (0,45 m) et quatre ou cinq des six longueurs possibles

2 Réponses correctes sans explications,
ou réponse correcte à la première question (0,45 m) et réponse incomplète à la seconde (de une à trois des six longueurs),
ou réponse correcte à la première question et réponse erronée la deuxième due au fait d'avoir comptabilisé les 4 « dalles-sommets » dans le calcul des périmètres possibles

1 Réponse correcte à la première question

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Groupe 0^0

17. TRIANGLES DE MEMES AIRES (Cat. 9, 10)

Paul veut construire des triangles qui ont tous un côté de 5 cm, un autre de 8 cm et une aire de 16 cm^2.

Combien de triangles différents peut-il construire ?

Déterminez pour chaque triangle la longueur du troisième côté.

Expliquez comment vous êtes arrivés à votre réponse.

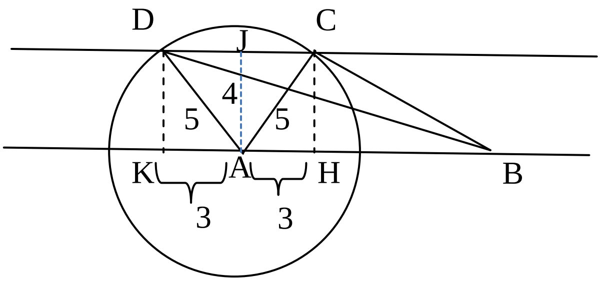
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique:

Déterminer le nombre de triangles que l'on peut construire, connaissant la longueur de deux des côtés et leur aire. Déterminer la longueur du troisième côté.

Analyse de la tâche :

- Exclure que les côtés de 5 cm et 8 cm sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle : $(5 \times 8)/2 = 20 \neq 16$.
- Faire le choix d'un des deux côtés connus pour base du triangle ABC à construire, utiliser la formule de l'aire du triangle pour déterminer la mesure de la hauteur correspondante. Si par exemple, on choisit le côté AB = 8 cm pour base, la hauteur correspondante mesure 4 cm.
- Le troisième sommet d'un triangle à construire est donc situé sur l'une des deux droites parallèles à cette base, distantes de 4 cm. On ne considère qu'une de ces deux droites, car pour des raisons de symétrie les triangles construits sur l'autre ne seront pas différents.
- Utiliser la longueur connue du second côté (5 cm) pour déterminer, avec un compas, les positions possibles du troisième sommet sur la droite considérée.
- Le cercle centré sur le sommet A de rayons 5 cm, coupe cette droite en deux points C et D sommets des triangles cherchés. Le cercle centré sur le sommet B coupe cette droite en deux autres points qui sont des sommets de triangles identiques aux précédents par symétrie.



- Ensuite, il est possible sur un dessin bien fait d'utiliser la règle pour mesurer la longueur du troisième côté (valeur approchée qui ne satisfait pas la demande d'un calcul de sa mesure, mais acceptable au niveau 8 sans supposer connu le théorème de Pythagore).
- Calculer la longueur possible du 3e côté. Pour cela, si H et K sont les pieds des hauteurs issues de C et D :
  - déterminer les longueurs AH et AK à l'aide du théorème de Pythagore dans les triangles rectangles AHC et AKD (AH = AK = 3 cm, si AB = 8 cm est choisie comme base),
  - en déduire la longueur BC, en utilisant à nouveau le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BHC. BC = $\sqrt{41}$ cm,
  - en déduire de même la longueur BD, en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle DKB, on obtient DB = $\sqrt{137}$ cm.
- En prenant pour base le côté de 5 cm, on obtient les mêmes triangles, mais avec des calculs plus compliqués : Pour le triangle ABC, AB = 5 cm ; AC = AD = 8 cm ; CH = 6,4 cm ; $AH^2 = AC^2 – CH^2 = 64 – 40,96$; AH = 4,8 cm, HB = 0,2 cm ; $BC^2 = CH^2 + HB^2 = 40,96 + 0,04 = 41$, d'où BC = $\sqrt{41}$ cm. On retrouve la même longueur que dans le cas précédent. Idem pour le triangle ABD.

Attribution des points :

4 Réponses exactes (2 triangles et les mesures des troisièmes côtés : $\sqrt{41}$ cm et $\sqrt{137}$ cm) avec des explications claires et complètes, avec un dessin et des calculs

3 Réponses exactes avec des explications incomplètes ou peu claires,

ou réponse erronée due à une erreur de calcul mais avec des explications correctes,

ou réponses approchées (2 triangles et les mesures des troisièmes côtés : 6,4 cm et 11,7 cm obtenues sur un dessin précis),

ou réponse : 4 ou 8 triangles (un triangle et son symétrique par rapport à un des côtés et/ou un triangle et son symétrique par rapport à la médiatrice d'un des côtés) et un calcul correct de la longueur du troisième côté avec des explications claires et complètes

2 Réponses exactes sans explication ni calcul,

ou réponse partielle (1 triangle) avec des explications claires et complètes

1 Début de raisonnement correct prouvant la compréhension du problème (par exemple, dessin d'un triangle sans construction, mesure d'un côté et de la hauteur correspondante et calcul de l'aire)

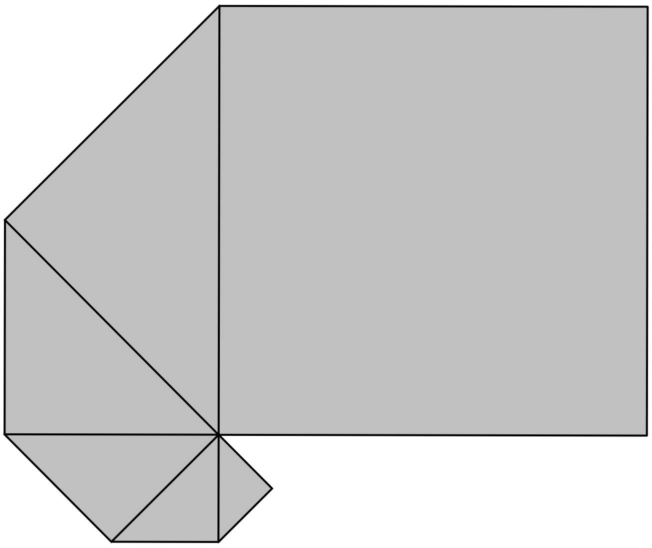
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma

18. SPIRALE DE CARRES (II) (Cat. 9, 10)

Jules a superposé exactement six carrés de papier pour former cette figure. Il a commencé par poser un petit carré de 1 cm de côté. Puis un deuxième plus grand qui en cache la moitié, et ainsi de suite. On ne voit entièrement que le plus grand, le sixième, qui cache la moitié du cinquième, qui cache à son tour la moitié du quatrième …



Jules décide de continuer à superposer des carrés selon les mêmes règles :
- chaque carré a un sommet en commun avec tous les précédents ;
- chaque nouveau carré cache la moitié du précédent.

Calculez (en cm²) l'aire de la figure qui serait obtenue après avoir superposé tous les carrés jusqu'au 20e.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

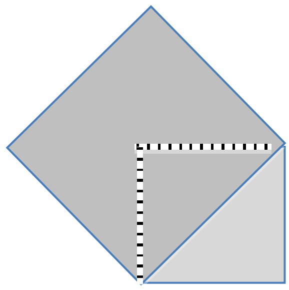
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer la surface occupée par une suite de 20 carrés, le premier ayant 1 cm de côté, partiellement superposés, disposés en « spirale » avec un sommet commun et le côté de chacun coïncidant avec la diagonale du précédent (les six premiers carrés sont dessinés).

Analyse de la tâche

- Analyser le dessin et percevoir les règles de succession des six carrés : le carré de départ, le point commun, la coïncidence d'un côté du nouveau carré avec la diagonale du précédent… et le fait important que le septième carré ne recouvrira pas le premier mais que le huitième le fera et de même pour les suivants.
- Constater, éventuellement après avoir dessiné les parties cachées de quelques carrés (cf. la figure ci-contre), que seule une moitié de chaque carré est visible et que l'aire d'un carré ou d'un triangle rectangle est le double de celle de l'aire du carré qu'il recouvre à moitié ou du triangle rectangle qui le précède.



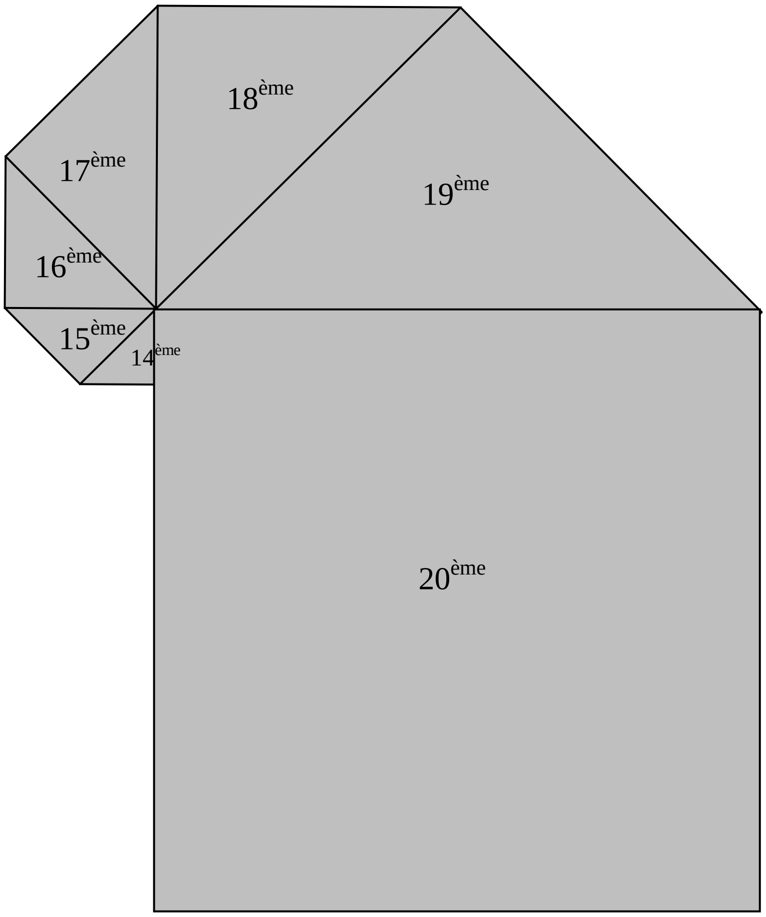
- On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle rectangle qui est aussi un côté de l'angle droit du triangle rectangle suivant et en déduire que les aires successives sont doublées à chaque nouveau carré.
- Comprendre qu'en doublant l'aire des carrés à chaque fois, les dimensions du 20ème seront trop grandes pour que tous les carrés soient dessinés, « à la main » on ne réussit pas à aller au-delà du dixième ou onzième. Il est par conséquent nécessaire « de voir avec l'esprit » ou de passer au registre du calcul.

- Passer dans le domaine numérique et noter explicitement les correspondances entre les rangs des triangles rectangles visibles (de 1 à 19) et leurs aires exprimées éventuellement en « triangles unités » (dénombrés par pavage). Percevoir la progression des puissances de 2 dans les aires obtenues, notamment pour les derniers termes.

rangs des triangles :	1	2	3	4	5	6	7	8	…	17	18	19
aires (en triangles unités):	1	2	4	8	16	32	2^6	2^7		2^{16}	2^{17}	2^{18}
aires en cm^2 :	0,5	1	2	4	8	16	2^5	2^6		2^{15}	2^{16}	2^{17}

La 20^e figure est un carré d'aire 2^{19} cm^2 (elle est faite de 4 triangles isométriques au triangle de rang 19).

- Considérer la figure reconstruite à partir du dernier carré (le $20^{ème}$) et remarquer qu'avant le $14^{ème}$, les carrés sont tous cachés et trouver à partir de la suite précédente des puissances de 2 la progression des aires visibles.



- Il faudra donc ne conserver que les aires visibles des sept derniers carrés, du 14^e au 20^e dont seule celle du dernier est celle d'un carré entier, les six précédents étant celles de demi-carrés. L'aire demandée est donc (en cm^2) : $(2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17}) + 2^{19} = 2^{12} (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 128) = 782\,336$.

Attribution des points

4 Réponse correcte (782 336, en cm^2) avec explications claires (les sept aires explicitées)

3 Réponse correcte (782 336, en cm^2) sans explications ou explications très incomplètes
ou erreur de calcul mais avec les 7 aires bien reconnues

2 Réponse erronée due à une confusion dans les 7 aires à déterminer (les sept carrés entiers, ou les sept demi-carrés),
ou bien réponse erronée donnant la somme totale de la progression des puissances de 2, de 1 à 2^{18} plus l'aire 2^{20} du $20^{ème}$ carré en triangles unité, ou la moitié en cm^2, soit 786 431,5 cm^2

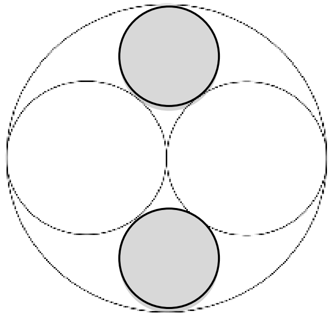
1 Réponse erronée où il y a plus de 7 aires prises en compte
ou début de raisonnement (reconnaissance de la suite des aires des carrés seulement)
ou calcul de l'aire des six premiers carrés seulement

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Groupe 0^0

19. LES CERCLES (Cat. 10)



Dans un cercle de rayon r, on a tracé deux cercles plus petits de rayon r/2. Dans l'espace resté libre, on a tracé deux autres cercles encore plus petits, mais avec le rayon le plus grand possible, placés comme l'indique la figure.

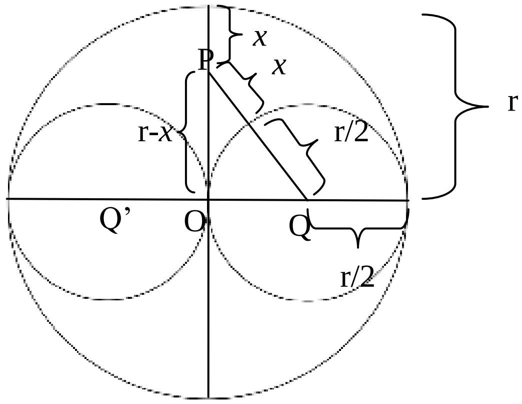
Quel est le rayon de ces deux petits cercles ?
Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Calculer le rayon d'un cercle tangent à trois autres cercles dans la configuration donnée.

Analyse de la tâche



- Comprendre, par symétrie de la figure, que le centre P du petit cercle est sur la médiatrice du segment qui joint les centres Q et Q' des deux cercles de rayon r/2.
- Dessiner approximativement cette figure agrandie et, avec la règle, mesurer son rayon et le comparer avec celui r du grand cercle.

Ou bien, se rappeler que deux cercles sont tangents si et seulement si la distance de leurs centres est égale à la somme de leurs rayons.

- Appeler x le rayon du petit cercle à déterminer et écrire les conditions pour que ce cercle de rayon x soit tangent aux trois autres.
- Appliquer le théorème de Pythagore au triangle OPQ et obtenir l'équation : $(r/2+x)^2 = (r/2)^2+(r-x)^2$
- Sa résolution donne $x = r/3$

Attribution des points :

4 Réponse correcte avec des explications claires et complètes
3 Réponse correcte avec des explications incomplètes, ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul avec des explications complètes et claires
2 Réponse correcte sans explications ou obtenue par une mesure sur le dessin, ou procédure bien engagée mais pas aboutie (par exemple, non résolution de l'équation)
1 Début de raisonnement correct qui montre la compréhension du problème, ou un dessin correct
0 Incompréhension du problème

Niveau : 10

Origine : Parma