« Quelles tâches pour l'enseignant ? »

- Avant l'épreuve, repérer les énoncés concernant sa classe
- Imprimer ces énoncés en 6 à 8 (ou un peu plus selon les habitudes) exemplaires
- Rappeler à la classe les règles du RMT (une affiche peut être présente dans la classe) :

> - L'épreuve dure 50 min
> - Les élèves ont droit à tous les outils, supports, cahiers, livres, affiches, chronomètres, timers, TNI de la classe, etc.
> - L'enseignant ne peut pas aider les élèves (aucun mot ni aucun geste qui pourrait les orienter vers une réponse, une stratégie, une procédure, une organisation, une collaboration avec d'autres élèves n'est possible) : les élèves ne doivent compter que sur leurs camarades de classe
> - UNE seule réponse pour la classe pour chaque problème est attendue
> - Les problèmes sont notés de 0 à 4
> - Il faut expliquer comment le résultat a été trouvé et parfois justifier pourquoi les élèves pensent que le résultat est correct
> - Conseil : il vaut mieux donner une réponse même si on n'est pas sûr de sa justesse plutôt que de ne rien donner (les essais sont parfois récompensés par 1 point)

- Désigner un espace (tableau/aimant, table/bureau, banc, etc) où les élèves doivent poser LA réponse de la classe pour chaque problème avant le terme des 50 min de passation
- Poser les énoncés classés par numéros de problèmes sur une table, un bureau, un banc ou un tableau/aimant
- Lancer le chronomètre ou le timer pour 50 min
- Observer la classe de manière neutre (pour anticiper les futurs apprentissages en méthodologie, organisation, communication, mathématiques, stratégie de recherche, procédures de résolutions, comportement, distribution de la parole, validation des résultats, etc)
- Au bout de 50 min, récupérer ce que les élèves ont déposé dans l'espace "réponse"
- Après les 50 min, vérifier que chaque feuille comporte le code d'identification de la classe et au besoin l'inscrire
- Garder une copie de la production de chaque problème traité par la classe pour des mises en commun ultérieures ou en cas de perte lors du transfert vers les correcteurs
- Remplir le bordereau listant les problèmes pour lesquels les élèves ont réalisé une réponse
- Glisser les réponses de la classe et le bordereau dans une enveloppe
- Transmettre cette enveloppe au responsable de la correction (soit le CPC de sa circonscription pour le premier degré soit le professeur de maths désigné lors de l'inscription pour le second degré)

« Quels énoncés pour ma classe ? »

1. Repérer la catégorie de votre classe : il est indiqué par le chiffre qui suit le signe « / ».
   *Exemple : code 28/ **4** 12 123 = catégorie 4 ou cat.4*

2. Repérer les problèmes de l'épreuve pour votre classe selon sa catégorie.
   Exemples :
- *une classe inscrite en **catégorie 4** doit résoudre les problèmes **1 à 6.***
- *une classe inscrite en **catégorie 5** doit résoudre les problèmes **3 à 9.***

Liste des problèmes		**CATEGORIE DE LA CLASSE**							
		Ecole élémentaire			**Collège et Lycée**				
		3	4	5	6	7	8	9	10
1	Le cadre de Liz	X	X						
2	Beaucoup de fruits (I)	X	X						
3	Cinq amis à la pizzeria	X	X	X					
4	Lancer de fléchettes	X	X	X					
5	La tortue de Zoé	X	X	X					
6	Des triangles dans un polygone (I)		X	X	X				
7	Assemblages de triangles (I)			X	X				
8	Les bonds de Mirka			X	X	X			
9	Beaucoup de fruits (II)			X	X	X			
10	Trois amis et leurs maisons				X	X			
11	Prix des stylos				X	X	X		
12	Chaîne de polygones				X	X	X	X	X
13	Assemblages de triangles (II)					X	X		
14	Des triangles dans un polygone (II)					X	X		
15	L'enclos des animaux						X	X	X
16	Panneau décoratif						X	X	X
17	Décimaux coloriés						X	X	X
18	Première action en bourse							X	X
19	Un apprenti géomètre							X	X
20	Loteries							X	X

BORDEREAU À JOINDRE AUX FEUILLES-RÉPONSES

CODE de la classe : LY _ _ _ _ _

Merci de cocher les cases des problèmes pour lesquels des feuilles-réponses ont été communiquées aux correcteurs.

Liste des problèmes		**CATEGORIE DE LA CLASSE**							
		Ecole élémentaire			**Collège et Lycée**				
		3	4	5	6	7	8	9	10
1	Le cadre de Liz								
2	Beaucoup de fruits (I)								
3	Cinq amis à la pizzeria								
4	Lancer de fléchettes								
5	La tortue de Zoé								
6	Des triangles dans un polygone (I)								
7	Assemblages de triangles (I)								
8	Les bonds de Mirka								
9	Beaucoup de fruits (II)								
10	Trois amis et leurs maisons								
11	Prix des stylos								
12	Chaîne de polygones								
13	Assemblages de triangles (II)								
14	Des triangles dans un polygone (II)								
15	L’enclos des animaux								
16	Panneau décoratif								
17	Décimaux coloriés								
18	Première action en bourse								
19	Un apprenti géomètre								
20	Loteries								

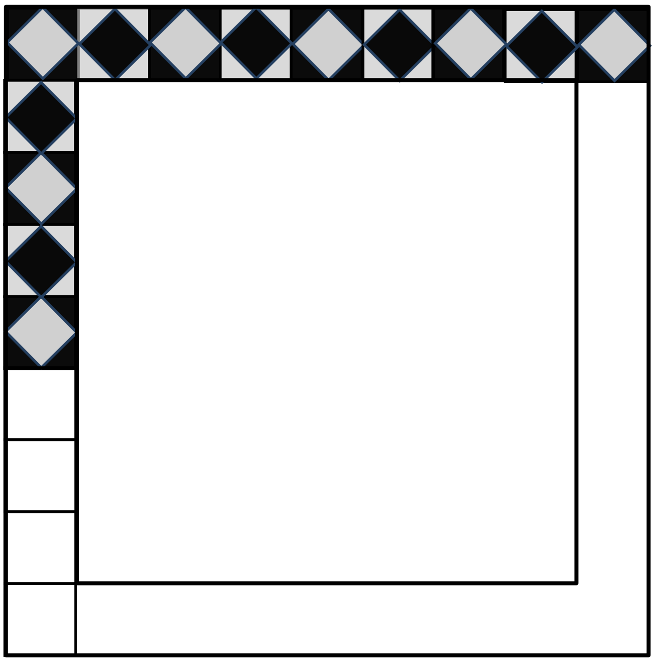
	Titre	Catégories	Origine	Domaine
1	Le cadre de Liz	3 4	LU	Géométrie : dénombrer des pièces de différentes catégories nécessaires pour paver une figure
2	Beaucoup de fruits (I)	3 4	SI	Opérations dans N : chercher 3 nombres connaissant leur somme et des relations entre ces nombres
3	Cinq amis à la pizzeria	3 4 5	RZ	Raisonnement : prendre en compte des contraintes et effectuer des déductions
4	Lancer de fléchettes	3 4 5	RV	Opérations dans N : recherche des décompositions additives d'un nombre avec des nombres donnés
5	La tortue de Zoé	3 4 5	RMG	Opérations dans N : chercher 3 nombres connaissant leur somme et des relations entre ces nombres
6	Des triangles dans un polygone (I)	4 5 6	LY	Géométrie : recherche d'un nombre donné de décompositions d'un heptagone en 4 triangles
7	Assemblages de triangles (I)	5 6	PR	Géométrie et mesure : recherche d'un assemblage de triangles ayant le plus grand périmètre possible
8	Les bonds de Mirka	5 6 7	SR	Longueurs : recherche de chemins avec des contraintes sur le nombre et la longueur des étapes
9	Beaucoup de fruits (II)	5 6 7	SI	Opérations dans N : chercher 2 nombres connaissant des relations entre ces nombres et une information sur leur somme
10	Trois amis et leurs maisons	6 7	SI	Numération et arithmétique : déterminer 3 nombres à partir d'informations sur ces nombres
11	Prix des stylos	6 7 8	BB	Opérations dans D : recherche d'un nombre à partir d'informations sur des décompositions additives et multiplicatives de ce nombre
12	Chaîne de polygones	6 7 8 9 10	SI	Suite numérique : déterminer le rang d'un terme
13	Assemblages de triangles (II)	7 8	PR	Géométrie et mesure : recherche d'un assemblage de triangles ayant le plus grand périmètre possible
14	Des triangles dans un polygone (II)	7 8	LY	Géométrie : recherche d'un nombre donné décompositions d'un heptagone en 4 triangles
15	L'enclos des animaux	8 9 10	PU	Aire et agrandissement : recherche de l'aire d'un agrandissement à partir de la données de certaines dimensions
16	Panneau décoratif	8 9 10	G0A0	Suite géométrique décroissante : recherche du 1er terme inférieur à 1
17	Décimaux coloriés	8 9 10	G0A0	Opération dans D : quotient décimal exact ou approché de deux entiers
18	Première action en bourse	9 10	GTCP	Pourcentages : recherche d'un prix initial connaissant l'écart entre ce prix et le prix final après 2 baisses de prix successives suivies d'une augmentation
19	Un apprenti géomètre	9 10	GTGP	Géométrie : détermination de la mesure d'un angle
20	Loteries	9 10	SI	Algèbre : résolution dans N d'un système de 2 équations à 3 inconnues

1. LE CADRE DE LIZ (cat. 3, 4)

Liz veut offrir à sa maman un cadre photo de forme carrée.

Elle décide de décorer la bordure du cadre avec des triangles et des carrés coloriés en noir et en gris.

Voici les triangles et les carrés que Liz a déjà dessinés et coloriés.



Quand Liz aura terminé, combien y aura-t-il de triangles noirs sur la bordure du cadre ? Et combien de carrés gris ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de deux types de formes géométriques de couleurs différentes, parmi les formes nécessaires pour recouvrir régulièrement la bordure d'un carré, une partie de la bordure étant déjà tracée et coloriée.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation **:** le cadre photo est carré, le dessin sur la bordure est régulier (formé toujours par un carré entouré de quatre triangles), deux formes ayant un côté en commun doivent être d'une couleur différente.
- Compléter le dessin du cadre, colorier selon la règle et dénombrer ensuite les carrés et les triangles comme demandé.
  Ou constater qu'autour d'un carré gris il y a quatre triangles noirs, dénombrer les carrés gris et multiplier le nombre par 4 pour obtenir le nombre des triangles noirs.

Ou

En observant la régularité du motif, on peut identifier plusieurs stratégies de comptage, par exemple :

- Remarquer que chaque côté du cadre sera identique au côté déjà complété dans la figure et dénombrer les carrés gris et les triangles noirs qui sont présents sur ce côté (5 carrés gris, 20 triangles noirs), puis multiplier ces nombres par 4 (4 côtes).
- Se rendre compte qu'en procédant ainsi, chaque motif placé dans un coin du cadre est comptabilisé 2 fois et donc retirer 4 fois 1 carré gris et 4 fois 4 triangles noirs. On obtient 16 carrés gris, 64 triangles noirs.

Ou

- Considérer que la bordure du carré est constituée par 4 rectangles 1×8
- Dénombrer les triangles noirs et les carrés gris sur un de ce rectangles (4 carrés gris, 16 triangles noirs) et multiplier par 4.

Attribution des points

4 Réponse correcte (16 carrés gris, 64 triangles noirs) avec une description claire et complète de la procédure ou un dessin complet du cadre

3 Réponse correcte avec une description partielle ou peu claire de la procédure ou un dessin incomplet ou très imprécis

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul ou de comptage, mais la procédure est correcte (on comprend que les motifs placés dans les coins ont été comptabilisés une seule fois).

Ou réponse incomplète due à l'oubli de certaines pièces

Ou seules les pièces manquantes pour compléter la bordure ont été comptées (9 carrés gris et 36 triangles noirs)

Ou réponse correcte sans description, ni dessin

1 Début de recherche correct mais avec les motifs des coins comptabilisés deux fois (20 carrés gris, 80 triangles noirs)

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 3, 4

Origine : Luxembourg

2. BEAUCOUP DE FRUITS (I) (Cat. 3, 4)

Maman a acheté des oranges, des pommes et des bananes.

Thomas compte les fruits. Au total il y en a 29.

Le nombre de pommes est le double du nombre d'oranges et il y a 3 oranges de plus que de bananes.

Combien y a-t-il d'oranges, combien y a-t-il de pommes et combien y a-t-il de bananes ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres dont la somme est 29, le plus grand est le double du deuxième et le deuxième nombre est égal au plus petit augmenté de 3.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il n'y a que trois variétés de fruits et que le nombre total de fruits est 29.
- Interpréter les relations « double du » et « 3 de plus ».
- Déduire de la lecture qu'il y a plus de pommes que d'oranges (deux fois) et que le nombre d'oranges est supérieur au nombre de bananes (3 de plus).
- Comprendre qu'il faut rechercher trois nombres respectant les relations données et dont la somme est 29.
- Procéder par essai en fixant, par exemple, le nombre de fruits d'une variété et déterminer le nombre de fruits des deux autres. La procédure la plus simple consiste à fixer le nombre de bananes, puis à calculer le nombre d'oranges et enfin le nombre de pommes. Calculer la somme des trois nombres et la comparer à 29.
- Les essais peuvent être organisés (comparer le nombre total de fruits à 29 et selon que ce nombre est inférieur ou supérieur à 29, augmenter ou diminuer le nombre de fruits de la catégorie choisie), jusqu'à trouver la solution (5 bananes, 8 oranges et 16 pommes).

Ou

- Les essais peuvent être inorganisés (de nouveaux essais sont faits sans tenir compte des résultats des essais précédents)

Attribution des points

4 Réponse correcte (8 oranges, 16 pommes et 5 bananes) avec une description claire de la procédure

3 Réponse correcte avec une description peu claire de la procédure

2 Réponse correcte sans description, ni vérification

Ou réponse erronée (les 3 nombres sont exacts mais il y a confusion sur les variétés de fruits dans la réponse, par exemple 5 pommes, 16 oranges et 8 bananes

Ou les relations entre les variétés de fruits sont correctes mais erreur de calcul avec réponse cohérente avec les calculs effectués)

Ou absence de réponse mais présence d'essais qui prouvent la compréhension des trois contraintes (relations entre les nombres et somme égale à 29), sans erreur de calcul

1 Début de recherche correct (une des deux relations entre les variétés de fruits : « est le double de » et « 3 de plus que » est correctement interprétée et respectée)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Siena

3. CINQ AMIS À LA PIZZERIA (Cat. 3, 4, 5)

Alice, Bruno, Camille, Dino et Elsa vont dans une pizzeria pour manger chacun une pizza. Ils commandent quatre types de pizza différents : napolitaine, margherita, capricciosa, aux champignons.

- Dino et Alice n'aiment pas les champignons ;
- Bruno et Elsa ont commandé le même type de pizza ;
- Camille a commandé une capricciosa ;
- Dino n'a pas commandé une margherita.

Quel type de pizza ont commandé Alice, Bruno, Dino et Elsa ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Associer un type de pizza parmi quatre à chaque personne d'un groupe de cinq en respectant quatre contraintes dont deux sont formulées par une négation.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que le nombre d'amis est différent du nombre de types de pizzas.
- Comprendre que s'il y a quatre types de pizza et qu'il y a cinq amis, personne n'a choisi le même type de pizza que Bruno et Elsa et que les trois autres amis ont choisi chacun un type de pizza différent.
- La troisième information permet d'attribuer la capricciosa à Camille, ainsi il reste trois types de pizza, champignons, napolitaine et margherita, à attribuer à quatre personnes. La première information exclut d'attribuer la pizza aux champignons à Dino et Alice, ce qui signifie que Bruno et Alice ont commandé une pizza aux champignons.
- Il ne reste plus alors qu'à attribuer les pizzas napolitaine et margherita. La dernière information conduit à conclure que Dino a commandé la napolitaine et Alice la margherita.

Ou

- Partir de la dernière information et déduire que Dino, puisqu'il n'a pas commandé une margherita, ni une pizza aux champignons (première information), ni une capricciosa (troisième information), a commandé une napolitaine.
- Alice n'a pas commandé une pizza aux champignons, ni une capricciosa, ni une napolitaine. Elle a donc commandé une margherita.
- En déduire que Bruno et Elsa ont tous deux commandé une pizza aux champignons.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Alice a commandé une margherita, Bruno et Elsa ont commandé une pizza aux champignons, Dino une napolitaine) avec description des déductions effectuées pour arriver à la réponse (sous forme de texte ou au moyen d'un schéma associant à chacun les types de pizza possibles et en justifiant les associations qui sont successivement écartées...)

3 Réponse correcte avec explication peu claire de la procédure

Ou réponse correcte avec seulement la vérification

2 Réponse correcte sans explication

Ou réponse correcte pour Bruno et Elsa, mais inversion entre les types de pizza de Dino et Alice

1 Absence de réponse mais attribution correcte à un ou deux des amis, autre que Camille.

Ou une déduction correcte faite à partir des informations de l'énoncé (par exemple Bruno et Elsa n'ont pas pris une capricciosa parce que…)

0 Incompréhension du problème

Ou attribution correcte uniquement pour Camille.

Niveaux : 3, 4, 5

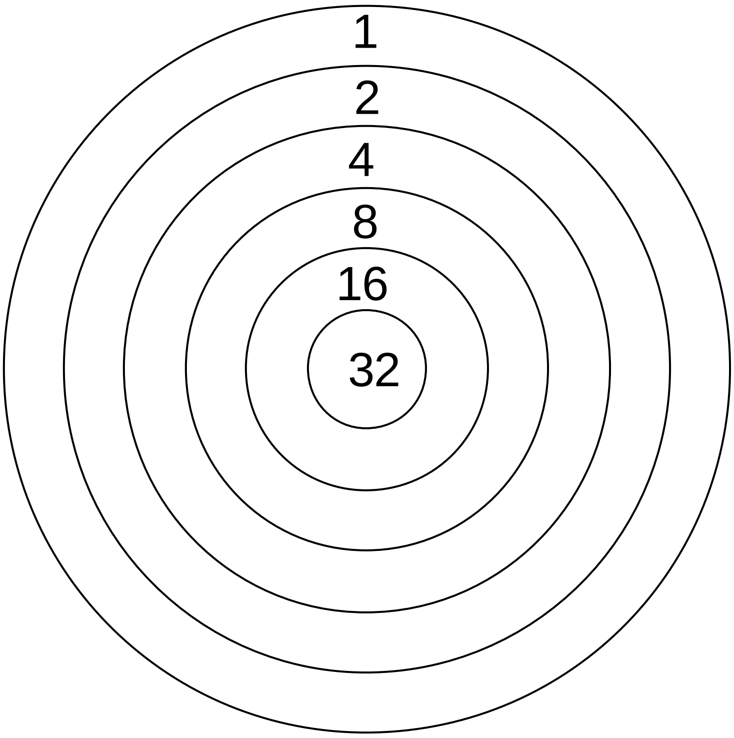
Origine : Rozzano

4. LANCER DE FLÉCHETTES (Cat. 3, 4, 5)

Ce jeu consiste à lancer cinq fléchettes, une seule fois chacune, sur une cible comme celle dessinée ci-dessous.

Si un joueur totalise exactement 51 points, il gagne un gros ours en peluche.

Une fléchette qui n'atteint pas la cible ne rapporte pas de point.



Quelles sont toutes les façons d'obtenir 51 points en lançant cinq fléchettes ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses et les calculs que vous avez faits.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les décompositions de 51 en somme de 5 termes choisi parmi 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 et 32.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on dispose de cinq fléchettes qu'on lance dans la cible, que certaines fléchettes peuvent ne pas atteindre la cible et que dans une même zone il peut y avoir plusieurs fléchettes.
- Comprendre qu'une fléchette rapporte le nombre de points inscrit dans la zone dans laquelle elle touche la cible et qu'une fléchette qui ne touche pas la cible marque 0 point.
- Comprendre que pour gagner le gros ours, il faut totaliser exactement 51 points et que 51 doit être obtenu en additionnant 5 termes pris parmi 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 et 32, qu'un même nombre peut être présent plusieurs fois dans la somme.
- La difficulté consiste à tenir compte des conditions : la somme doit comporter 5 termes, pas nécessairement tous différents et dont certains peuvent être 0.
- Effectuer des essais inorganisés : choisir 5 nombres, en faire la somme et la comparer à 51. Cette stratégie a peu de chance d'aboutir à l'ensemble des solutions, mais elle peut être une stratégie d'entrée qui permet de prendre conscience qu'un des deux nombres 32 et 16 au moins doit être présent.
- Effectuer des essais organisés. Par exemple en recherchant les solutions qui contiennent le nombre 32. Il faut lui ajouter 19 points et donc chercher comment obtenir 19 avec 4 nombres pris parmi 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16.
  Avec 16, on trouve 16 + 2 + 1 + 0 = 19 et 16 + 1 + 1 + 1 = 19. Sans 16, on ne trouve que 8 + 8 + 2 + 1. La décomposition 8 + 8 + 1 + 1 + 1 ne convient pas car 6 nombres seraient alors utilisés pour obtenir 51.

Poursuivre en cherchant les solutions qui ne contiennent pas 32. Avec 16, on trouve 16 + 16 + 16 + 2 + 1
Chercher ensuite des solutions qui ne contiennent ni 32, ni 16. En additionnant cinq 8, on obtient 40, qui est inférieur à 51. Il n'y a donc pas d'autres solutions.

- Remarque : tous les nombres autres que 1 étant pair, des élèves peuvent remarquer que leur somme est paire et que 1 doit être obligatoirement présent

Attribution des points

4 Réponse correcte (les 4 possibilités : 32, 16, 2, 1, 0 / 32, 16, 1, 1, 1 / 32, 8, 8, 2, 1 / 16, 16, 16, 2, 1 ou 1 fléchette dans la zone 32, 1 fléchette dans la zone 16, 1 fléchette dans la zone 2, 1 fléchette dans la zone 1et une fléchette qui n'a pas touché la cible, de même pour les autres cas), avec les sommes de 5 termes correspondantes ou de 4 termes si le cinquième est 0

3 Réponse avec seulement la présence des 4 sommes de 5 termes ou encore de 4 termes si le cinquième est 0

Ou seulement les 4 possibilités sans que les sommes correspondantes soient écrites

Ou 3 des possibilités avec les sommes correspondantes, sans autre somme ou proposition erronée

2 Les 4 possibilités ou seulement les 4 sommes avec au plus une autre proposition erronée

Ou 3 des possibilités ou seulement les 3 sommes, sans autre somme ou proposition erronée

1 3 ou 2 des possibilités ou seulement les sommes avec au plus une autre somme ou proposition erronée

Ou 1 des possibilités ou seulement la somme, sans autre somme ou proposition erronée

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Riva del Garda

5. LA TORTUE DE ZOÉ (Cat. 3, 4, 5)

Zoé a une tortue et, pendant la semaine, elle la nourrit de la façon suivante :

- le lundi, le mercredi et le vendredi, elle lui donne la même quantité de nourriture ;
- le mardi, le jeudi et le samedi, elle lui donne le double des autres jours ;
- le dimanche, elle ne lui donne pas à manger.

Dans toute la semaine, Zoé donne à sa tortue 54 g de nourriture.

Calculez la quantité de nourriture que la tortue de Zoé mange chaque jour de la semaine.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre qui multiplié par 3 et ajouté au triple de son double donne 54.

Analyse de la tâche

- Comprendre que Zoé donne à la tortue la même quantité de nourriture trois jours par semaine et pendant trois autres jours le double.
- Représenter la situation sous forme graphique, par exemple un dessin dans lequel à chaque jour de la semaine est associé un ou deux symboles.
  Totaliser les symboles utilisés : il y en a 9.
  Diviser 54 par 9 ou effectuer des essais multiplicatifs (9 x … = 54) pour obtenir la quantité de nourriture les jours impairs (6 grammes)
  Multiplier la valeur par 2 pour obtenir la quantité de nourriture les jours pairs (12 grammes)

Ou

- Procéder par essais progressivement organisés, par exemple en supposant 4 g pour le lundi, arriver à 36 g pour la semaine et constater qu'il faut augmenter la quantité.

Attribution des points

4 Réponse correcte (6 grammes le lundi, mercredi et vendredi et 12 grammes le mardi, jeudi et samedi) avec une description claire des étapes suivies, éventuellement au moyen d'un tableau ou de dessins (il peut être ajouté : 0 gramme le dimanche)

Ou réponse correcte avec des essais plus ou moins organisés mais qui font apparaitre les relations en jeu

3 Réponse correcte avec une description peu claire des étapes (par exemple 54 est divisé par 9 ou par 3 sans expliquer d'où viennent ces nombres)

2 Réponse correcte sans description de la procédure

Ou réponse : le lundi 6 g et, par exemple, le mardi 12 g en laissant de côté les autres jours de la semaine

Ou réponse erronée suite à des erreurs de calcul mais avec une procédure correcte.

1 Début de recherche correct, par exemple, des essais cohérents sont effectués mais sans aboutir à la solution

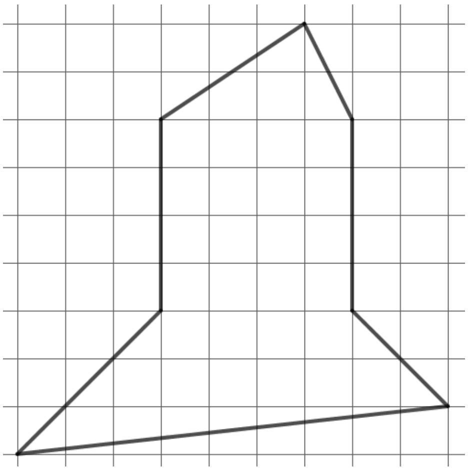
0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Romagna

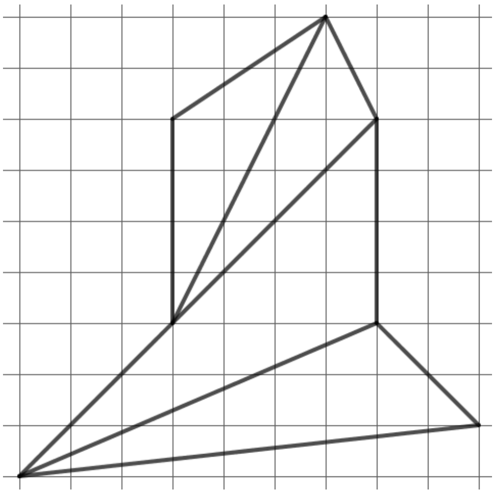
6. DES TRIANGLES DANS UN POLYGONE (I) (Cat. 4, 5, 6)

Thitanga veut partager cette figure en 4 triangles.



Elle a trouvé plusieurs partages différents de la figure en 4 triangles.

Voici le premier partage qu'elle a trouvé.



Trouvez cinq autres partages de la figure en 4 triangles.

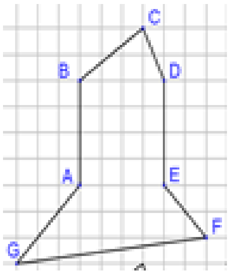
Dessinez-les sur les figures de la feuille jointe.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver cinq décompositions différentes en quatre triangles d'un heptagone concave dessiné sur quadrillage.

Analyse de la tâche



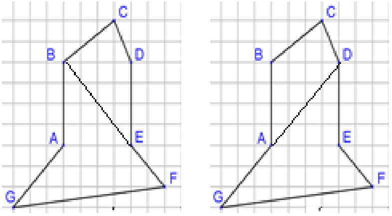
- Comprendre que pour faire apparaitre des triangles, il faut relier des sommets de l'heptagone ou prolonger des côtés parmi [GA], [EF], [DE] ou [BA].
- Remarquer que G, A et D sont alignés et que B, E et F le sont aussi donc prolonger [GA] et prolonger [EF] produit des découpages analogues à respectivement tracer [AD] et tracer [BE].

Recherche par essais et ajustements :

- Tracer des segments reliant des sommets ou en prolongeant des côtés de la figure et conserver ceux qui permettent d'obtenir quatre triangles intérieurs à la figure.
- Faire plusieurs essais et les comparer à ceux déjà trouvés.

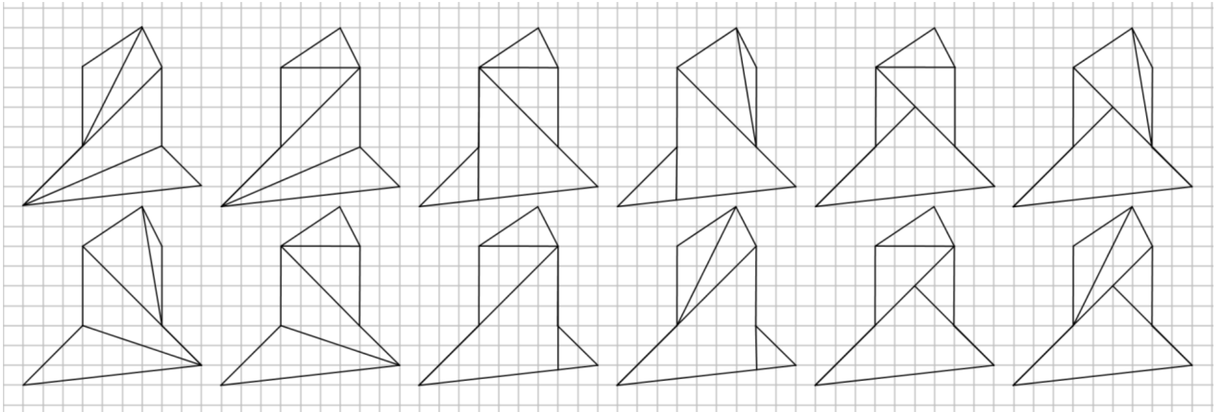
Recherche organisée :

- Avoir l'intuition qu'il est plus simple de partager un quadrilatère en triangles que de partager directement la figure qui est donnée.
- Rechercher toutes les façons de partager la figure en quadrilatères (il y en a deux).



- Pour chacun des deux cas :
  - partager chaque quadrilatère en deux triangles ;
  - chercher jusqu'à obtenir 5 partages différents de la figure donnée

Ci-dessous sont dessinées les 12 décompositions possibles de l'heptagone.



Attribution des points

4 5 découpages corrects différents, autres que l'exemple donné

3 4 découpages corrects différents, autres que l'exemple donné, avec éventuellement un doublon ou un découpage erroné

2 3 découpages corrects différents, autres que l'exemple donné, avec éventuellement des doublons ou découpages erronés

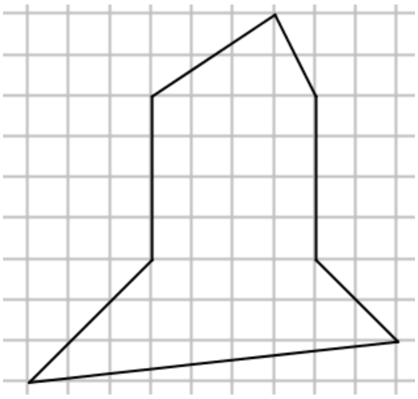
1 1 ou 2 découpages corrects différents, autres que l'exemple donné, avec éventuellement des doublons ou découpages erronés

0 Incompréhension du problème : aucun découpage correct.

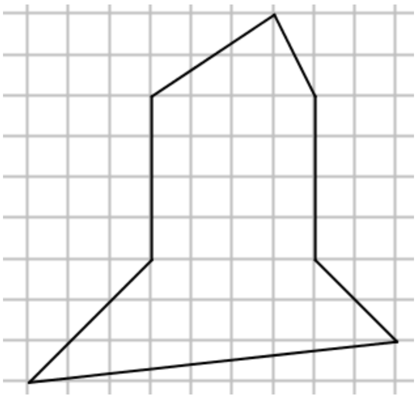
Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Lyon

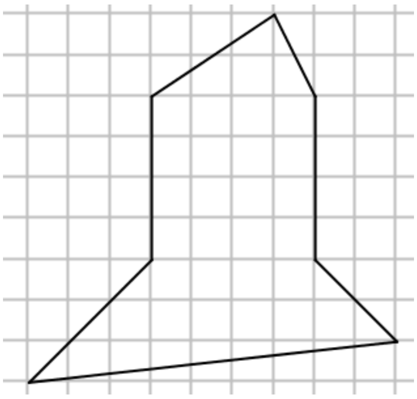
Problème 6 – Feuille réponse



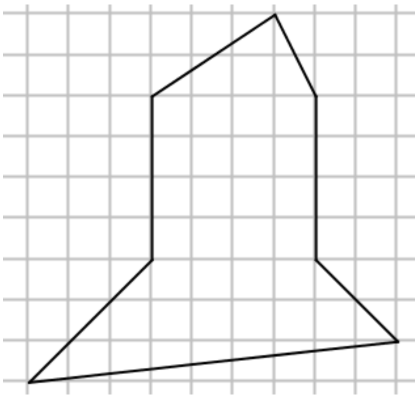
Partage 1



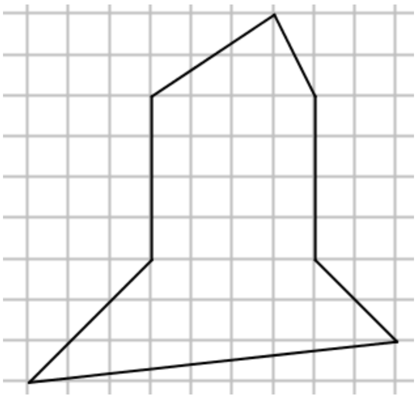
Partage 2



Partage 3



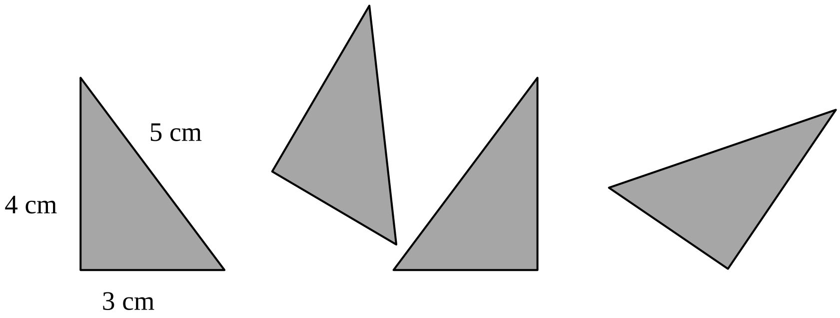
Partage 4



Partage 5

7. ASSEMBLAGES DE TRIANGLES (I) (Cat. 5, 6)

André a découpé quatre triangles rectangles égaux. Leurs côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm.



En assemblant ses quatre triangles André forme des figures. Il veut que :

- les triangles ne se superposent pas ;
- les triangles se touchent par des côtés de même longueur ;
- aucune figure n'ait un trou.

Voici quelques-uns des essais d'André :

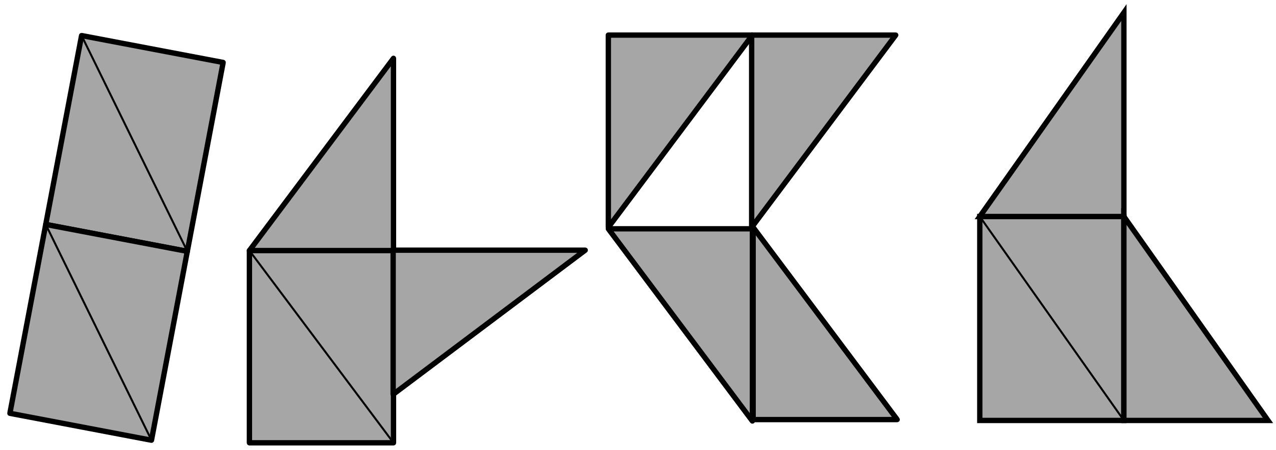


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

Les figures 1 et 4 sont correctes, la figure 2 n'est pas correcte car il y a deux triangles qui se touchent par deux côtés qui n'ont pas la même longueur, la figure 3 n'est pas correcte parce qu'elle a un trou.

En assemblant ses quatre triangles en respectant les règles qu'il s'est fixées, André veut former une figure qui a le plus grand périmètre possible.

Trouvez comment cette figure peut être faite et dessinez-la.

Ecrivez la mesure de son périmètre et les calculs que vous avez faits.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Rechercher, parmi les polygones obtenus en assemblant par des côtés de même longueur quatre triangles rectangles égaux (dont les côtés mesurent 3 ; 4 et 5 cm), l'un de ceux dont le périmètre est maximal.

Analyse de la tâche

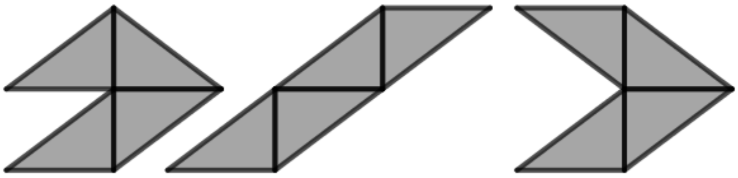
- Observer les exemples pour s'approprier les règles de construction des figures.

- Procéder par essais : après avoir construit une figure et calculé son périmètre, en chercher une autre dont le périmètre est plus grand et continuer ainsi en cherchant des figures avec des périmètres toujours plus grands.

Ou

- Se rendre compte que pour obtenir le périmètre maximal il faut avoir le maximum de côtés de triangles sur le pourtour et comprendre que le périmètre sera le plus grand si ceux-ci sont les côtés les plus longs des triangles.
- Assembler deux triangles par le plus petit côté (ou par le côté intermédiaire). Rattacher à ce premier assemblage les deux autres triangles par le côté intermédiaire (ou le plus petit côté) en faisant en sorte que les deux triangles n'aient qu'un seul côté commun. Calculer le périmètre. Recommencer avec de nouveaux assemblages. Constater que le périmètre le plus grand est obtenu en assemblant les deux premiers triangles par le côté intermédiaire.

Exemples d'assemblage pour lesquels le périmètre est maximal : 4 x 5 cm + 2 x 4 cm = 28 cm



Attribution des points

4 Dessin correct d'une figure de périmètre 28 cm, avec indication et calcul du périmètre

3 Dessin correct d'une figure de 28 cm de périmètre avec indication du périmètre mais sans le calcul
Ou dessin correct d'une figure de 26 cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

2 Dessin d'un polygone de 28 cm de périmètre sans indication ni calcul du périmètre
Ou dessin correct d'une figure de 28 cm de périmètre mais avec erreur de calcul du périmètre
Ou dessin correct d'une figure de 26 cm avec indication du périmètre mais sans le calcul
Ou dessin correct d'une figure de 24 cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

1 Dessin correct d'une figure de 24 cm avec indication du périmètre, mais sans le calcul
Ou dessin correct d'une figure de périmètre 22 cm, différente de la figure 1
Ou début de recherche cohérent (dessin de plusieurs figures respectant les contraintes, mais sans conclure)

0 Incompréhension du problème (dessin de figures qui ne respectent pas les règles)
Ou dessin correct d'une figure de périmètre 20 cm

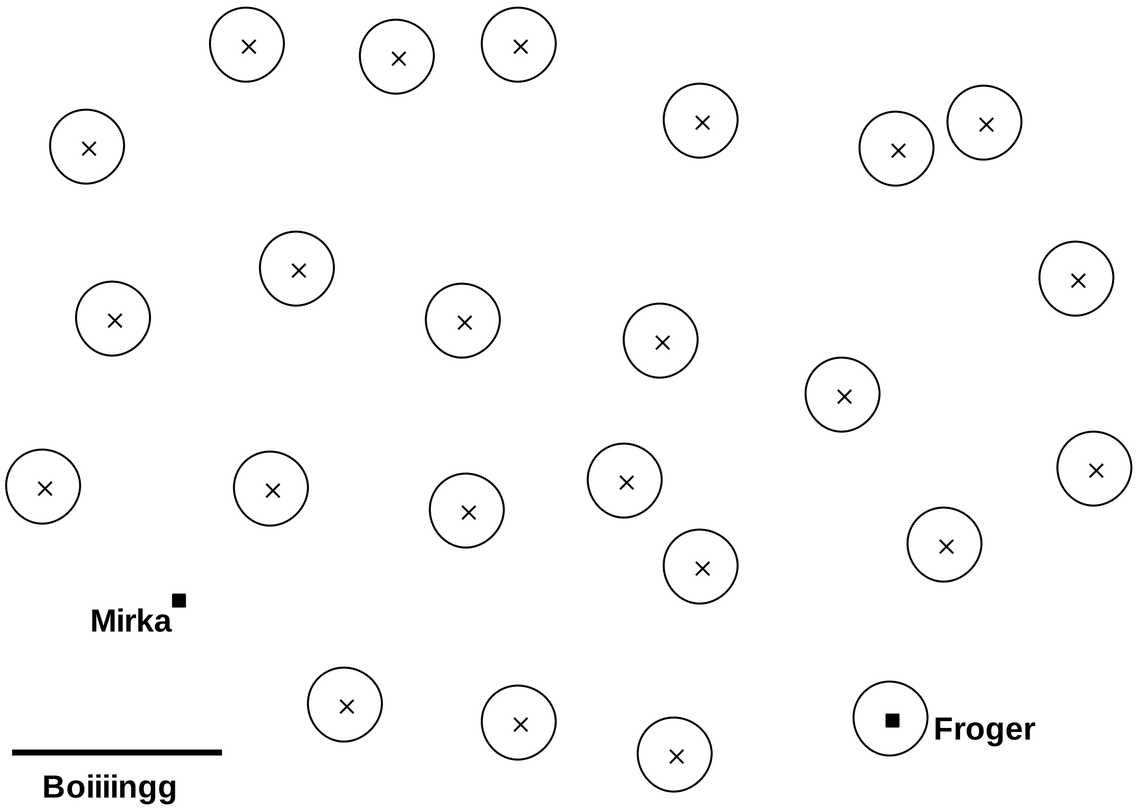
Niveaux : 5, 6

Origine : Parma

8. LES BONDS DE MIRKA (Cat. 5, 6, 7)

Mirka la grenouille est installée sur un caillou au bord d'un étang. Elle veut rejoindre son amoureux Froger qui fait la sieste sur un nénuphar. D'autres nénuphars se trouvent sur l'étang et permettent à Mirka de se déplacer en sautant de l'un à l'autre. Mirka doit atteindre exactement le centre de chaque nénuphar, indiqué par une croix, afin de ne pas tomber à l'eau. Mirka manque d'entraînement : elle ne peut pas faire de bonds plus longs qu'un «boiiiingg», ni faire plus de 12 bonds. Elle ne veut pas passer plusieurs fois sur le même nénuphar.

La longueur d'un boiiiingg est celle du segment tracé en bas de la carte ci-dessous.



Combien de chemins différents permettent à Mirka de rejoindre Froger ?

Dessinez tous les chemins possibles sur les feuilles jointes.

ANALYSE A PRIORI

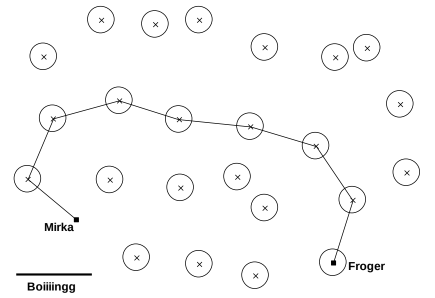
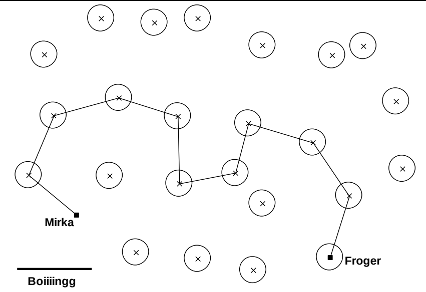
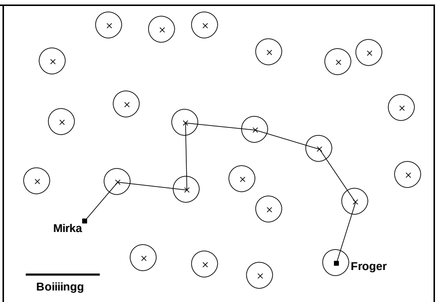
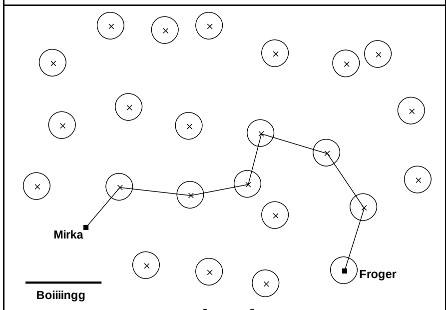
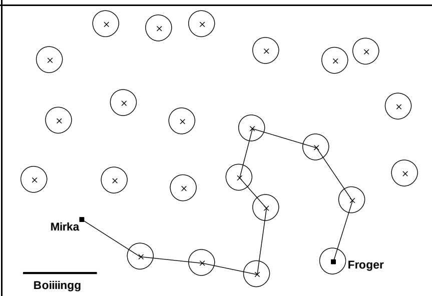
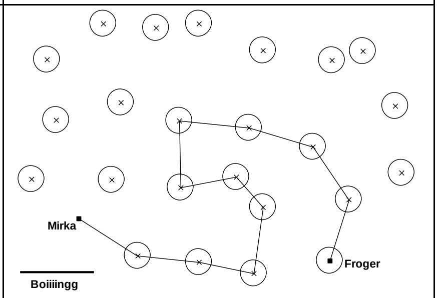
Tâche mathématique

Identifier les différentes lignes brisées, construites en reliant des points, dont le nombre de segments est inférieur ou égal à 12 et dont la longueur de chaque segment est inférieure ou égale à celle d'un segment donné.

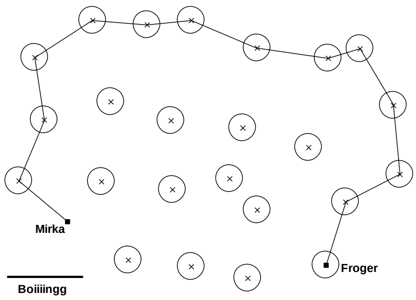
Analyse de la tâche

- Comprendre que deux points consécutifs d'un chemin ne doivent pas être distants de plus d'une longueur fixée et donc comprendre que la grenouille peut faire des bonds d'une longueur inférieure ou égale à cette longueur fixée.
- Comprendre qu'un chemin emprunté par la grenouille doit comporter au plus 12 bonds.
- Chercher entre quels nénuphars peut sauter la grenouille. Pour cela, mesurer les distances séparant deux points voisins ou prendre l'écartement de compas entre deux points voisins, les comparer à la longueur maximale d'un bond.

- A partir de l'emplacement de Mirka (ou de celui de Froger), chercher quelles sont les lignes brisées constituées de segments d'une longueur inférieure ou égale à celle d'un boiiiingg qui peuvent être tracées pour atteindre l'emplacement de Froger (ou de Mirka). Eliminer celles qui comportent plus de 12 segments.
- Tracer les chemins sur les supports fournis.
- Les six solutions sont :

 8 bonds	 10 bonds	 7 bonds
 7 bonds	 9 bonds	 11 bonds

- D'autres chemins respectent la condition sur la longueur de chaque bond mais pas sur le nombre de bonds, comme par exemple celui ci-dessous qui nécessite 13bonds :



Attribution des points

4 Réponse correcte (les 6 chemins clairement tracés), sans autre chemin erroné

3 De 4 à 5 chemins, avec dessins corrects, sans autre chemin erroné
Ou les 6 chemins, avec dessins corrects mais avec présence d'un autre chemin erroné

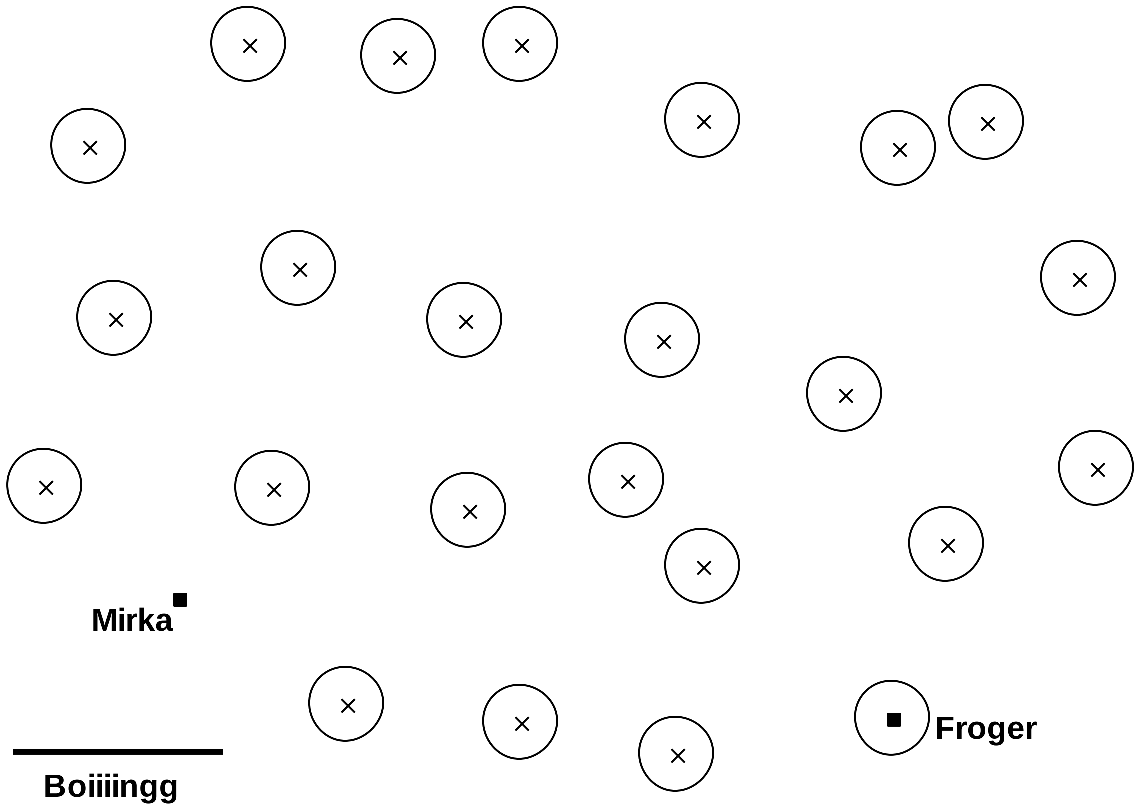
2 2 ou 3 chemins, avec dessins corrects, sans autre chemin erroné
Ou de 4 à 5 chemins, avec dessins corrects mais avec présence d'un ou deux autres chemins erronés
Ou 6 chemins, avec dessins corrects, mais avec présence de deux ou trois autres chemins erronés

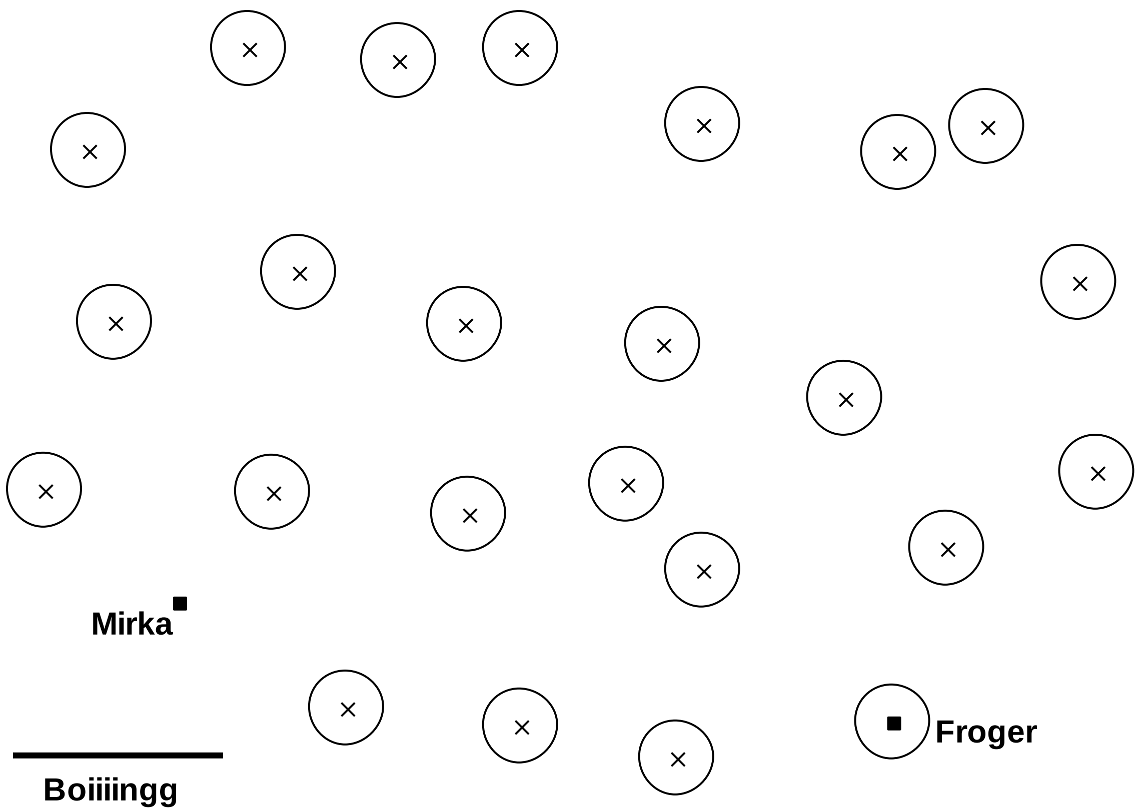
1 Au moins 1 chemin avec dessin correct, avec ou non présence d'autres chemins erronés

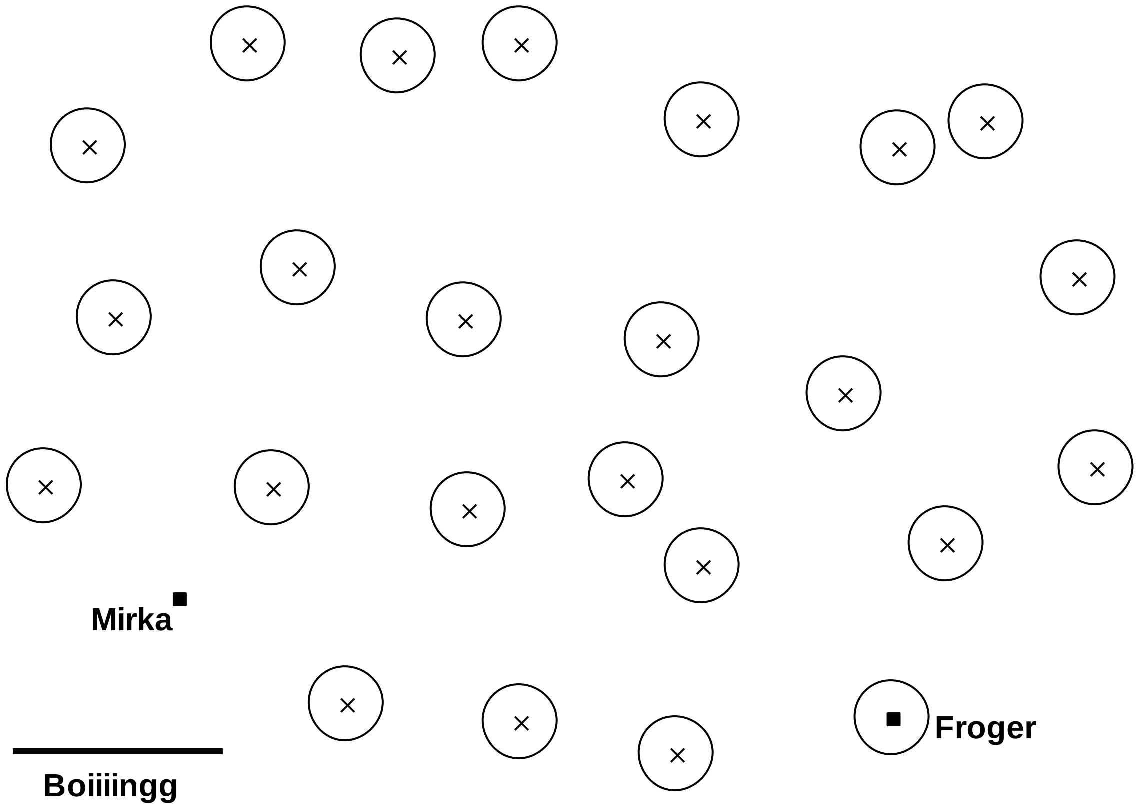
0 Incompréhension du problème

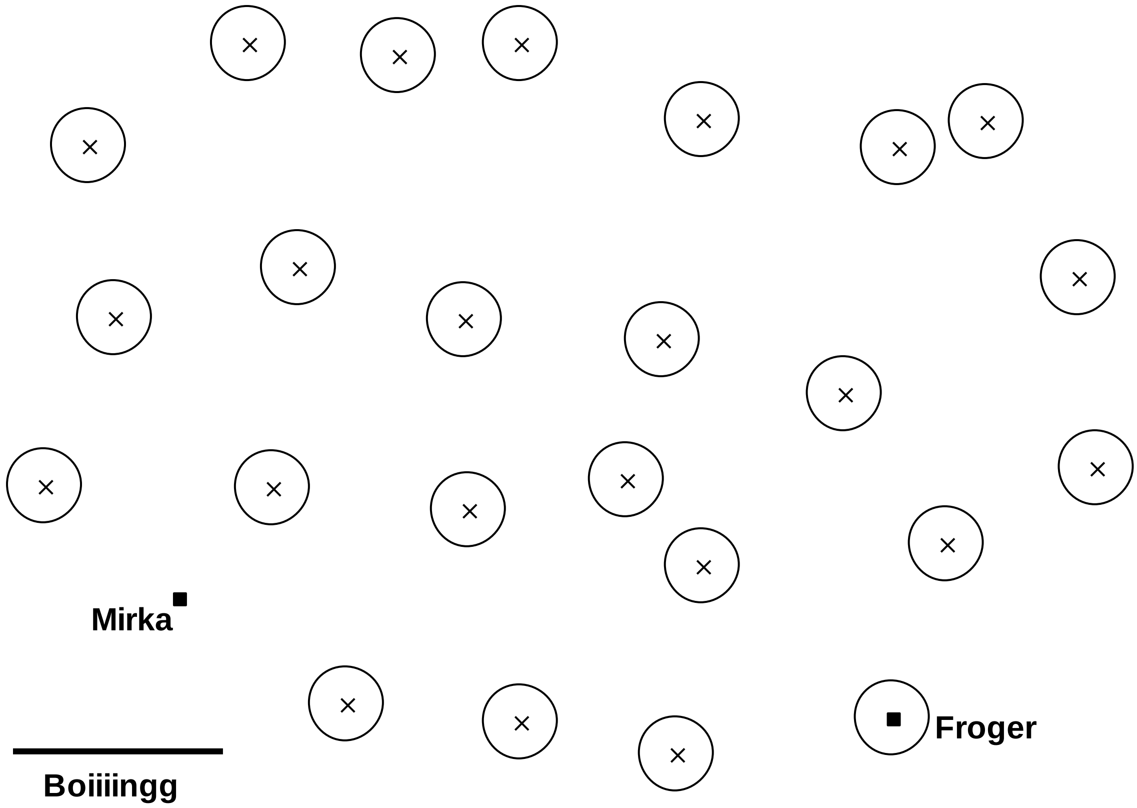
Niveaux : 5, 6, 7

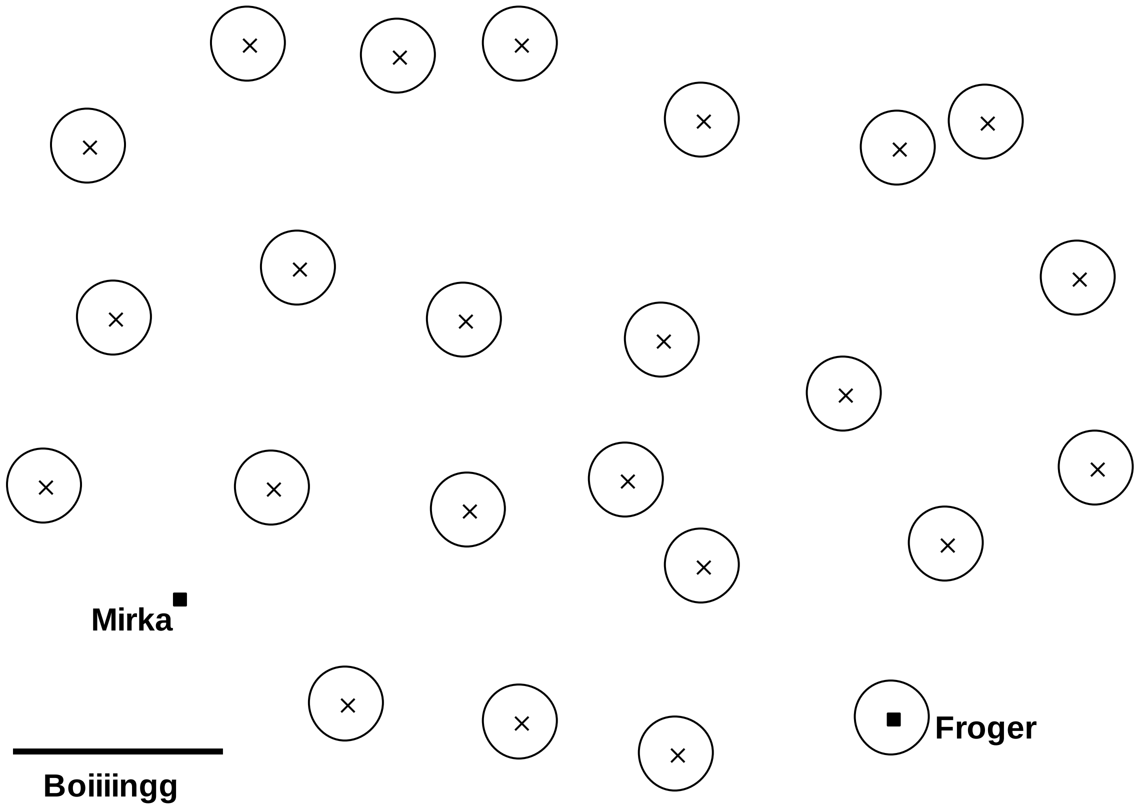
Origine : Suisse romande

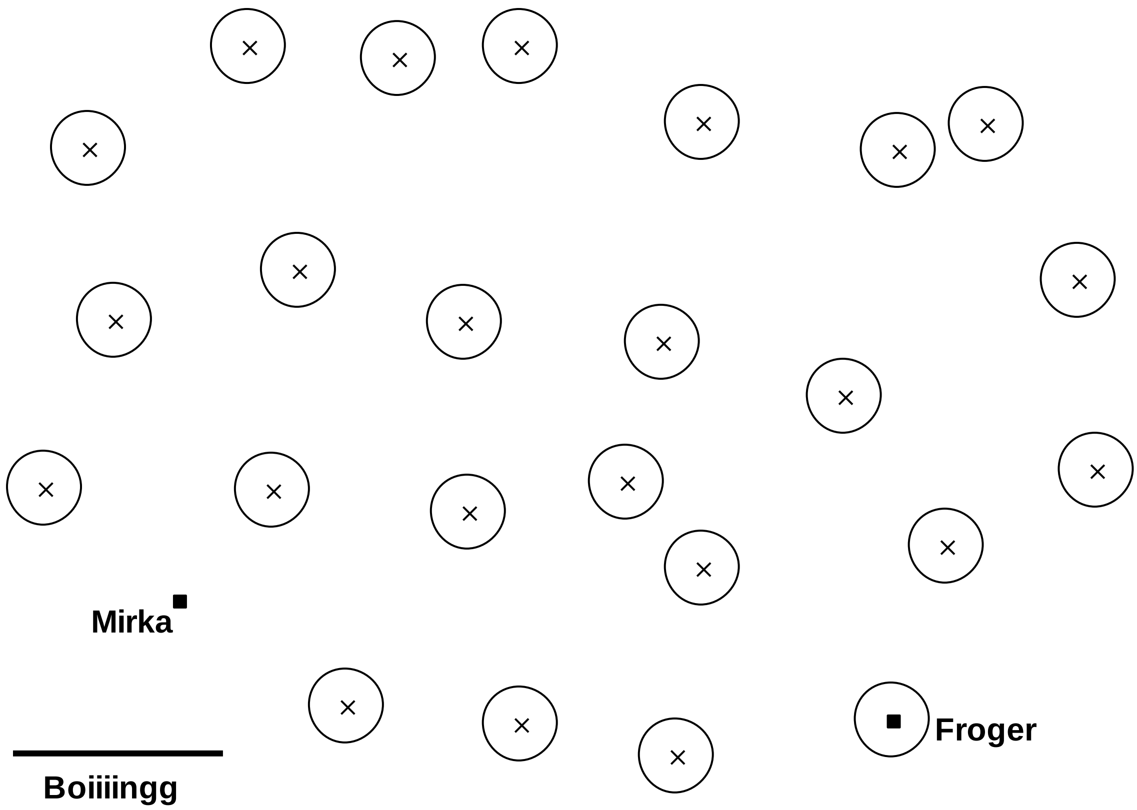

Mirka
Froger
Boiiiingg

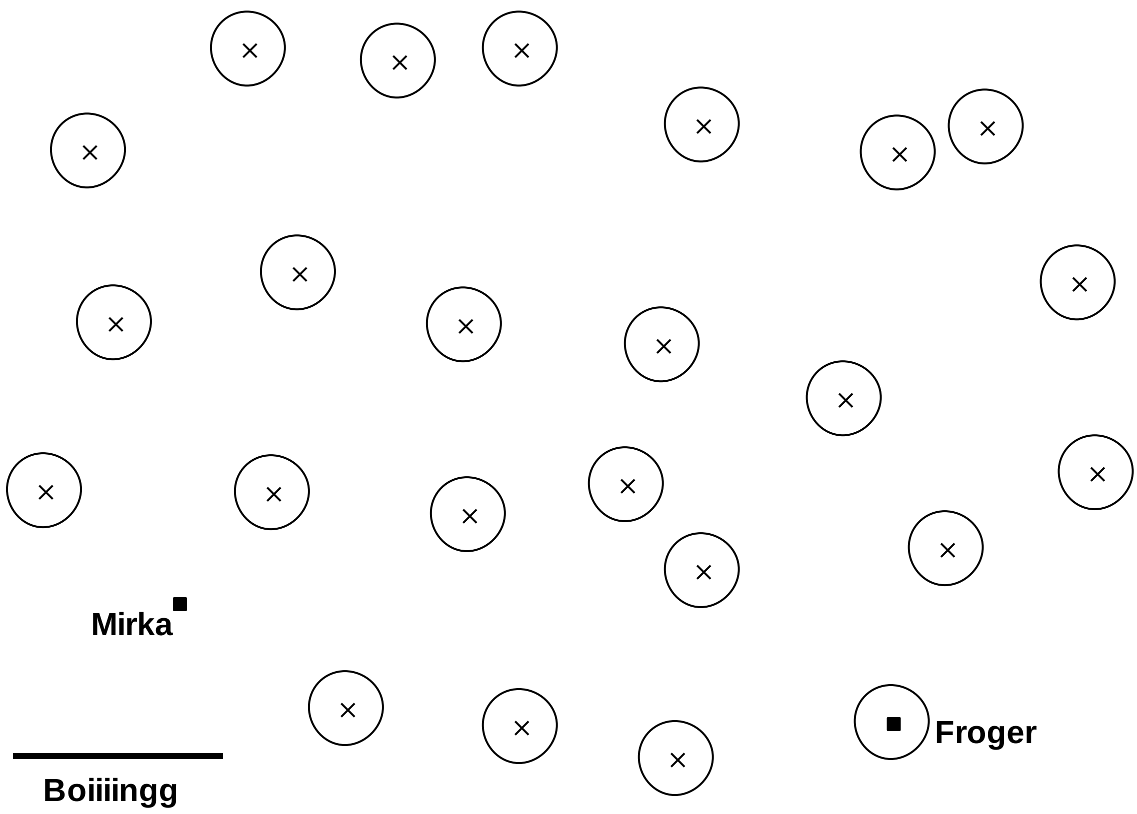

Mirka
Froger
Boiiiingg

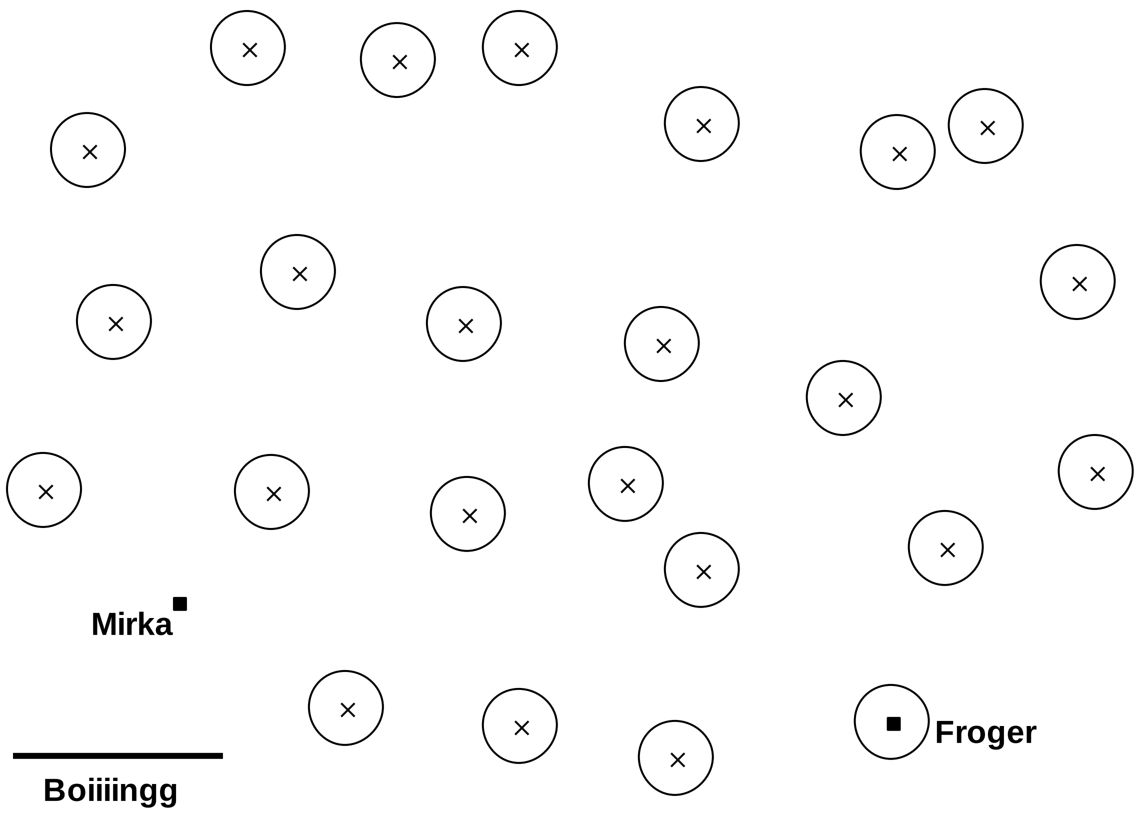

Mirka
Froger
Boiiiingg

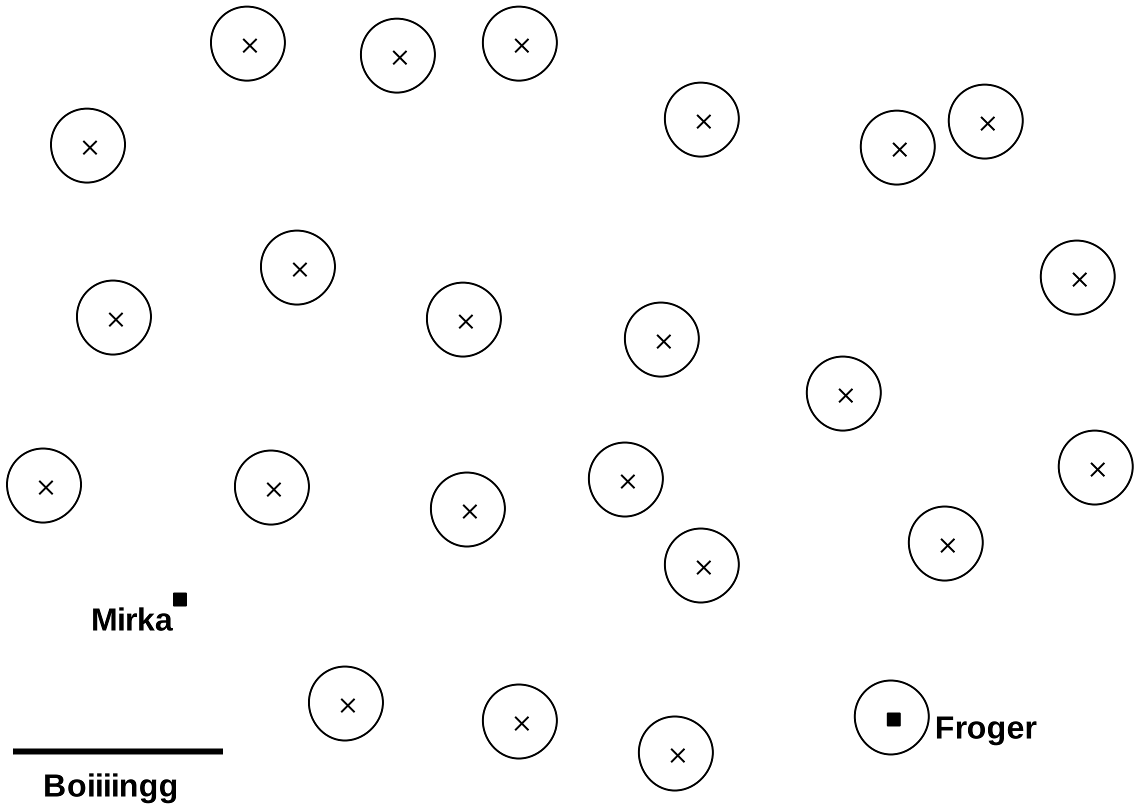

Mirka
Froger
Boiiiingg

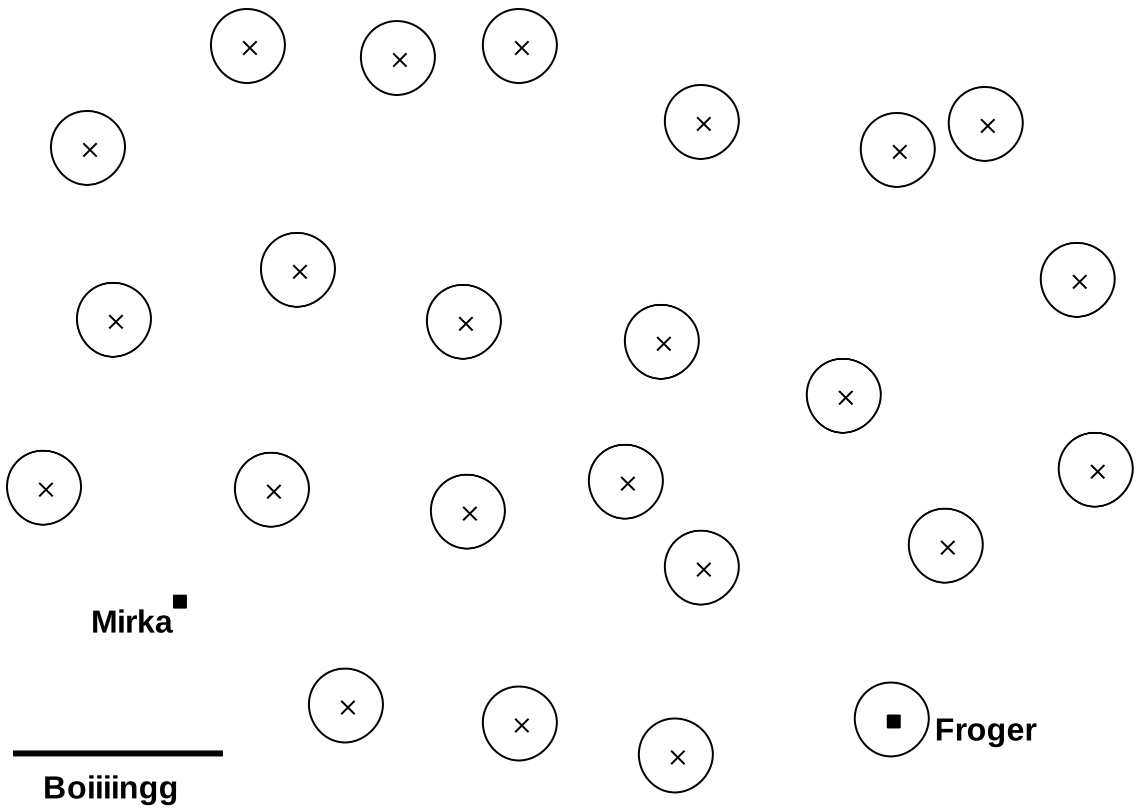

Mirka
Froger
Boiiiingg


Mirka
Froger
Boiiiingg


Mirka
Froger
Boiiiingg


Mirka
Froger
Boiiiingg


Mirka
Froger
Boiiiingg


Mirka
Froger
Boiiiingg

9. BEAUCOUP DE FRUITS (II) (Cat 5, 6, 7)

Thomas a placé dans un panier les poires et les pommes qu'il a récoltées dans son verger. Le nombre de pommes est le double du nombre de poires.

Thomas donne la moitié des pommes à Sofia et la moitié des poires à Adèle.

Il lui reste alors 36 fruits dans son panier.

Combien de poires et combien de pommes Thomas a-t-il récoltées ?

Montrer comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres entiers dont l'un vaut le double de l'autre et dont la somme de leurs moitiés est 36.

Analyse de la tâche

- Comprendre que si la relation entre le nombre de pommes et de poires est connue, leur somme n'est pas connue.
- Comprendre que si Thomas donne la moitié de ses pommes et de ses poires, il donne la moitié de tous ses fruits et donc que le nombre de fruits restant (36) correspond à la moitié du nombre de fruits récoltés. Déduire qu'il a récolté 72 fruits. Déduire de l'énoncé que, pour prendre la moitié de chaque quantité, les deux nombres doivent être pairs. Le problème consiste alors à rechercher deux nombres pairs dont l'un est le double de l'autre et dont la somme est 72.

Ou

- Comprendre que si Thomas donne la moitié de ses pommes et de ses poires, la moitié du nombre de pommes et de poires récoltées reste dans le panier. Comprendre que la relation entre le nombre de pommes et le nombre de poires est la même qu'entre leurs moitiés. Le problème revient à chercher deux nombres dont l'un est le double de l'autre et dont la somme est 36 et de doubler ensuite les deux nombres trouvés.

Plusieurs démarches possibles

- Procéder par essais : faire le choix d'un nombre de poires ou de pommes (dans ce cas il faut le choisir pair), déterminer le nombre de pommes (double) ou de poires (moitié) et faire la somme de ces deux nombres, comparer le résultat à 72 ou 36. Les essais peuvent être organisés ou inorganisés et effectués en recourant à une schématisation, par exemple au moyen de segments ou de rectangles.

Ou

- Déduire que, si le nombre de pommes est le double du nombre de poires, le nombre de poires représente le tiers du nombre total de fruits. Déterminer le nombre de poires en divisant (72 ou 36) par 3, puis le nombre de pommes.
- Conclure qu'il y a 24 poires et 48 pommes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (48 pommes et 24 poires), avec des explications claires (explicitation sous forme de texte ou d'un schéma montrant que le nombre total de fruits est 72 ou que la somme de la moitié du nombre de pommes et de la moitié du nombre de poires est 36, et par exemple il est écrit qu'« on a fait des essais» avec présence des calculs pour le couple solution ou indication que le nombre de poires est le tiers du nombre total et calcul qui en découle)

3 Réponse correcte mais explication partielle (un des points mentionnés pour 4 points est manquant)

2 Réponse correcte sans explications ni calculs ou uniquement une vérification

Ou réponse erronée (démarche correcte mais erreur de calcul et réponse cohérente avec les calculs effectués ou démarche correcte mais les deux types de fruits sont intervertis)

1 Début de recherche correct (présence de calculs qui attestent la compréhension des contraintes : relation entre les nombres de pommes et de poires et somme des deux nombres égale à 36 ou 72)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

10. TROIS AMIS ET LEURS MAISONS (Cat. 6, 7)

André, Bruno et Charles sont trois amis qui habitent la même rue : les deux premiers du même côté, Charles de l'autre côté.

- Les numéros pairs des maisons sont sur un côté de la rue et les numéros impairs sont sur le côté opposé.

- La maison d'André a le numéro le plus élevé : il est supérieur à 50 et inférieur à 100.

- Le numéro de la maison d'André est le double du numéro de la maison d'un des deux autres amis et le triple du numéro de la maison de l'autre.

- Tous les chiffres utilisés pour écrire les numéros des trois maisons sont différents les uns des autres.

Quels peuvent être les numéros des maisons d'André, Bruno et Charles ?

Écrivez, pour chacun des trois amis, le numéro de la maison dans laquelle il pourrait habiter.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver 3 nombres proportionnels à 1, 2, 3, dont le plus grand est compris entre 50 et 100, dont deux sont de même parité et dont tous les chiffres qui les composent sont différents.

Analyse de la tâche

- Comprendre que, si on connaît le numéro de la maison d'André, on trouve les numéros des maisons des deux autres amis en divisant ce nombre une fois par 2 et une fois par 3.
- Commencer par des essais, en choisissant pour la maison d'André un nombre compris entre 50 et 100 et essayer de le diviser par 2 et par 3 ; se rendre compte que le numéro d'André doit être pair, c'est-à-dire multiple de 2, ainsi que multiple de 3, donc multiple de 6.
- Comprendre qu'il faut procéder systématiquement à partir des numéros possibles de la maison d'André. Par exemple, écrire dans l'ordre tous les nombres pairs compris entre 50 et 100, puis ne garder que ceux qui sont également des multiples de 3 et écrire pour chacun de ces nombres sa moitié et son tiers ; ou considérer immédiatement les multiples de 6 et procéder comme ci-dessus. Puis obtenir les triplets suivants :
  54 – 27 – 18 ; 60 – 30 – 20 ; 66 – 33 – 22 ; 72 – 36 – 24 ; 78 – 39 – 26 ; 84 – 42 – 28 ; 90 – 45 – 30 ; 96 – 48 – 32
- Eliminer les triplets qui ne satisfont pas les conditions indiquées dans l'énoncé : ils ceux composés de trois nombres pairs et / ou il y a au moins un chiffre répété. Il ne reste que deux triplets, 54 – 27 – 18 et 78 – 39 – 26, qui respectent toutes les conditions.
- Attribuer les numéros aux maisons des trois amis pour les deux possibilités trouvées, en respectant les conditions indiquées dans le texte : n° 54 André, n° 27 Charles et n° 18 Bruno, ou n° 78 André, n° 39 Charles et n° 26 Bruno.

Attribution des points

4 Réponse correcte (n° 54 André, n° 27 Charles, n°18 Bruno, ou n° 78 André, n° 39 Charles, n° 26 Bruno ou André peut habiter au 54 ou 78, Charles au 27 ou 39 et Bruno au 18 ou 26) avec description correcte et complète de la procédure (indication des triplets de nombres à partir des nombres possibles pour André et raison des éliminations qui conduisent à ne conserver que les deux triplets)

3 Réponse correcte avec description incomplète de la procédure ou uniquement une vérification

Ou les deux triplets sont corrects avec description claire de la procédure, mais les maisons de Charles et Bruno sont interverties ou les numéros des maisons de Charles et Bruno sont exacts mais les prénoms des deux amis ne sont pas indiqués

Ou réponse correcte avec description correcte et complète de la procédure, mais sans indication de qui habite quelle maison

2 Réponse correcte sans description de la procédure ou uniquement la vérification

Ou présence en plus des deux triplets corrects, d'un ou deux triplets erronés comportant un chiffre répété ou ne comportant que des nombres pairs (non prise en compte de la différence de parité des numéros des maisons de chaque côté de la rue) avec une description, même incomplète, de la procédure

Ou un seul triplet correct sans autre triplet erroné, avec description complète ou partielle de la procédure.

1 Début de recherche correct (par exemple : essais de division par 2 et par 3 du nombre choisi pour André mais sans aboutir)

Ou un seul triplet correct, avec ou sans triplet erroné, sans description de la procédure

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7

Origine : Siena

11. PRIX DES STYLOS (Cat. 6, 7, 8)

André achète un stylo et paie avec une pièce de 2 euros. La caissière lui rend 2 pièces de valeurs différentes.

Béatrice achète trois stylos au même prix que celui d'André et paie avec un billet de 5 euros. La caissière lui rend 2 pièces de valeurs différentes entre elles et différentes de celles qu'elle a rendues à André.

Quel est le prix d'un stylo et quelles pièces de monnaie la caissière a-t-elle rendues à André et à Béatrice ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le prix d'un objet sachant qu'en payant avec une pièce de 2 euros, la somme rendue est constituée de deux pièces de valeurs différentes et que, en payant avec un billet de 5 euros trois objets du même prix, la somme rendue est constituée de deux pièces de valeurs différentes entre elles et différentes des pièces rendues précédemment.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le prix d'un stylo est inférieur à 2 euros et que son triple est inférieur à 5 euros.
- Comprendre qu'André et Béatrice reçoivent tous les deux comme rendu de leurs paiements respectifs deux pièces différentes et que les pièces de Béatrice sont différentes de celles d'André.
- Faire l'inventaire des pièces de monnaie : 2 €, 1 €, 50 c, 20 c, 10 c, 5 c, 2 c, 1 c

Il existe plusieurs façons de restreindre l'intervalle des valeurs possibles pour le prix d'un stylo.

- Par exemple, établir que le prix maximum d'un stylo peut être de 1,66 euro (1,66 × 3 = 4,98 tandis que 1,67 × 3 = 5,01), mais écarter cette valeur, car la somme rendue à André serait composée de plus de deux pièces. Comprendre que 1,65, 1,64, 1,63, 1,62, 1,61 ne conviennent pas pour la même raison, alors que 1,60 ne convient pas car la somme rendue à André serait alors composée de deux pièces identiques (20 centimes). Examiner ainsi tous les prix possibles d'un stylo (presque tous sont immédiatement rejetés sans avoir à considérer le triple du prix car la somme rendue est composée de plus de deux pièces). Poursuivre ainsi jusqu'à 1,30 euro pour lequel la somme rendue peut être composée d'une pièce de 20 centimes et d'une pièce de 50 centimes. Pour son triple (3,90 euros), la somme rendue peut être composée d'une pièce de 1 euro et d'une pièce de 10 centimes
  Conclure que le prix d'un stylo est 1,30 euro (ou 130 centimes).

Ou

- Procéder par essais plus ou moins organisés en écartant tous les prix possibles d'un stylo pour lesquels la somme rendue serait composée de plus de deux pièces ou déterminer les prix possibles d'un stylo après avoir fixé deux pièces différentes pour composer la somme rendue à André.
- Conclure que le prix d'un stylo est 1,30 euro (ou 130 centimes).

Ou

- À partir des rendus possibles trouver les prix correspondant pour un stylo acheté par André :

Pièces rendues	Prix du stylo	Pièces rendues	Prix du stylo
1 € et 50 c	0,50 € (2 − 1,50)	**50 c et 20 c**	**1,30 € (2 – 0,70)**
1 € et 20 c	0,80 € (2 − 1,20)	50 c et 10 c	1,40 € (2 – 0,60)
1 € et 10 c	0,90 € (2 − 1,10)	20 c et 10 c	1,70 € (2 – 0,30)

- Répéter la procédure pour Béatrice et découvrir que la seule possibilité qui permette la division par trois est d'avoir 1 € et 10 c comme rendu, ce qui correspond à un prix de 1,30 € par stylo : (5 - 1,10) ÷ 3 = 1,30. Le rendu correspondant fait à André pour ce prix est : 50 c et 20 c.
- Vérifier ensuite que les pièces rendues à Beatrice sont différentes de celles d'André et conclure que le prix de chaque stylo ne peut être que 1,30 € ou 130 centimes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (1,30 euro ou 130 centimes) avec indication des pièces rendues à André et Béatrice (20c et 50c pour le prix d'un stylo ; 1 € et 10c pour le prix de 3 stylos) avec description claire et complète de la procédure suivie (essais organisés avec vérification des conditions ou indication de tous les prix possibles pour un stylo, ou de toutes les sommes possibles qui peuvent être rendues à André ou présentation d'essais inorganisés et justification des choix effectués)

3 Réponse correcte avec description peu claire ou incomplète de la procédure (oubli de un à cinq cas dans une procédure organisée ou seulement présentation d'essais non organisés sans justification des choix effectués)

Ou réponse correcte avec seulement la vérification des conditions

2 Réponse correcte accompagnée de l'explication suivante « j'ai essayé tous les cas possibles »

Ou réponse correcte sans explication, ni vérification des conditions

Ou réponse erronée à cause d'une erreur de calcul, mais avec aux moins cinq essais effectués

1 Début de raisonnement correct (essais avec vérification des conditions sans aller jusqu'à expliciter les réponses)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

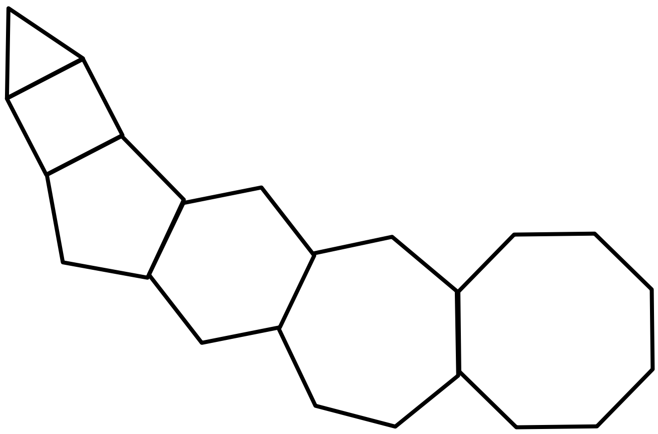
Origine : Bourg-en-Bresse

12. CHAÎNE DE POLYGONES (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Une « chaîne » de polygones réguliers est construite ainsi :

- on trace trois segments qui forment un triangle équilatéral ;
- à partir d'un côté du triangle on trace les segments qui manquent pour former un carré ;
- à partir d'un côté du carré on trace les segments qui manquent pour former un pentagone régulier ;
- et ainsi de suite on trace chaque fois les segments qui manquent pour former un polygone régulier qui a un côté de plus que le précédent.

La figure montre les premiers éléments de la chaîne : on y voit un triangle équilatéral, un carré, un pentagone, un hexagone, un heptagone et un octogone, mais la chaîne continue.



Combien de côtés aura le polygone auquel appartiendra le 2020e segment tracé dans cette chaîne de polygones ?

Montrer comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le suivant du denier terme de la suite des premiers entiers naturels dont la somme est le dernier nombre à être inférieur à 2020, dans le contexte d'une chaîne de polygones de 3, 4, 5, 6 …. côtés.

Analyse de la tâche

- Comprendre comment se construit la chaîne et les caractéristiques des polygones qui la composent : chacun a un côté de plus que le précédent en partant de 3 : 4 ; 5 ; 6 ; …
- Une première façon de s'approprier le problème consiste simplement à compter les segments sur la figure et voir que pour le 6e polygone (à 8 côtés) on arrive à 28 segments : 3, 6, 10, 15, 21, 28
- Observer que pour construire le septième polygone (à 9 côtés), on ajoute 8 segments aux 28 segments déjà tracés (28 + 8 = 36) et ainsi de suite. À chaque fois on ajoute le nombre suivant de celui qui vient d'être ajouté pour obtenir le polygone qui a un côté de plus que le polygone précédemment tracé et le nombre de segments tracés augmente d'autant : 36 + 9 = 45 (polygone à 10 côtés), 45 +10 = 55 (polygone à 11 côtés) et ainsi de suite jusqu'à 1891 + 62 = 1953 (polygone à 63 côtés), 1953 + 63 = 2016 (polygone à 64 côtés). Se rendre compte alors que les quatre segments qui manquent pour arriver à 2020 appartiennent au polygone à 65 côtés.
  (Cette procédure semble longue et fastidieuse. Un calcul d'une soixantaine de sommes et un contrôle rigoureux sont nécessaires mais cela ne prend que quelques minutes avec une calculatrice.)

Ou

- Organiser les données précédentes dans un tableau par exemple :

nb de côtés du polygone	3	4	5	6	…	*n*
nombre de nouveaux segments		3	4	5	…	*n* - 1
nombre total de segments : Sn	3	3+3	3+3+4	3+3+4+5	…	3+3+4+5+…+(*n*-1)

- Observer que si on remplace 3 par 1+2, la somme à calculer est : 1 + 2 + 3 + 4 + 5+…+ (*n* - 1)
- Si la formule qui donne la somme des n premiers nombres naturels est connue : $S_n = [n (n + 1)] / 2$, la procédure est plus rapide que la précédente. Quelques essais de valeurs de n permettent de découvrir que pour n = 64 (polygone à 64 côtés) la somme 1 + 2 + 3 + ... + 63 est 2016 (= 63 × 64/2). En déduire que le 2020e segment appartient au polygone à 65 côtés.

Attribution des points

4 Réponse correcte (65 côtés) avec description claire et complète de la procédure (formulation correcte des relations entre le nombre de côtés de la figure, la somme des nombres de segments et détail des calculs)

3 Réponse correcte avec description peu claire ou incomplète (par exemple, calculs pas complètement explicités)

Ou procédure correcte et bien décrite mais avec une erreur de calcul ou non prise en compte des 3 segments du triangle

Ou recherche pas à pas correcte pour les dix à quinze premiers éléments mais avec une erreur qui conduit à la réponse 64 ou 66

2 Réponse correcte sans aucune explication

Ou réponse erronée ou absence de réponse, mais avec une description correcte des relations entre le nombre de côtés de la figure et la somme des nombres de segments

1 Début de raisonnement correct avec calcul des sommes des nombres de côtés d'au moins les vingt à trente premiers polygones

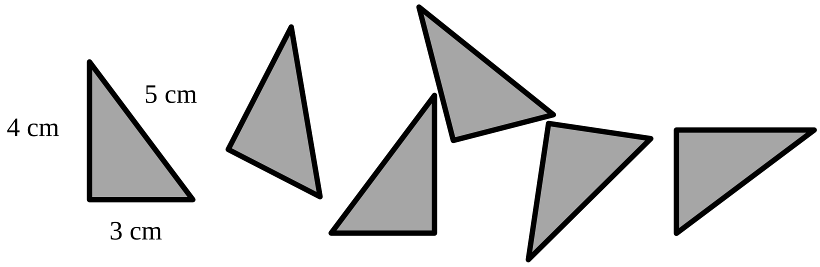
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

13. ASSEMBLAGES DE TRIANGLES (II) (Cat. 7, 8)

André a découpé six triangles égaux dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm.



En assemblant ses six triangles André forme des figures. Il veut que :
- les triangles ne se superposent pas ;
- les triangles se touchent par des côtés de même longueur ;
- aucune figure n'ait un trou.

Voici quelques-uns des essais d'André :

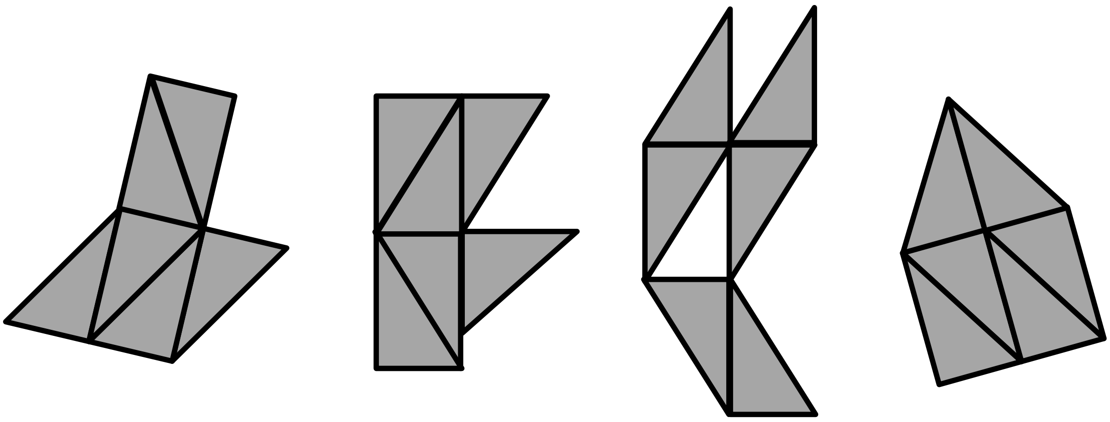


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

Les figures 1 et 4 sont correctes, la figure 2 n'est pas correcte car il y a deux triangles qui se touchent par deux côtés qui n'ont pas la même longueur, la figure 3 n'est pas correcte parce qu'elle a un trou.

Parmi toutes les figures qu'André peut construire avec ses six triangles en respectant les règles qu'il s'est fixées, dessinez-en une qui a le plus grand périmètre possible.

Écrivez la mesure de son périmètre et les calculs que vous avez faits.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Rechercher, parmi les polygones obtenus en assemblant par des côtés de même longueur six triangles rectangles égaux (dont les côtés mesurent 3 ; 4 et 5 cm), l'un de ceux dont le périmètre est maximal.

Analyse de la tâche

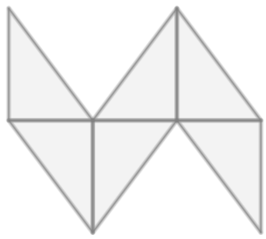
- Observer les exemples pour s'approprier les règles de construction des figures.
- Procéder par essais : après avoir construit une figure et calculé son périmètre, chercher à en construire un autre dont le périmètre est plus grand et continuer ainsi en cherchant des figure avec des périmètres de plus en plus grands.

Ou

- Se rendre compte que pour obtenir le périmètre maximal il faut avoir le maximum de côtés de triangles sur le pourtour et comprendre que le périmètre sera le plus grand si ceux-ci sont les côtés les plus longs des triangles.
- Quelle que soit la figure formée, il y a toujours cinq côtés communs et donc, puisqu'il n'y a que 18 côtés de triangles et 5 en commun, le pourtour sera formé de 18 – (2 x 5) = 8 côtés, dont seuls six peuvent être des hypoténuses et deux pouvant être des côtés les plus grands de l'ange droit. Le périmètre le plus grand sera donc 6 × 5 + 2 × 4 = 38 (en cm).
- Chercher ensuite à dessiner un polygone ayant ce périmètre.

Ou

- Raisonner tout de suite sur le périmètre. La somme des périmètres de tous les triangles est 12 × 6 = 72. Les côtés adjacents ne font pas partie du pourtour et leurs mesures n'interviennent pas dans le calcul du périmètre. En disposant les triangles deux à deux avec un seul côté commun, seuls le premier et le dernier peuvent avoir leur hypoténuse et le côté « 4 cm » sur le contour, par conséquent leurs côtés « 3 cm » sont communs au deuxième et au cinquième triangle, qui auront à leur tour un côté « 4 cm » commun avec les troisième et quatrième triangles qui eux auront leurs côtés « 3 cm » en commun. On en déduit que le périmètre maximum du polygone est 72 – (2 × 2 × 3 + 2 × 2 × 4 + 2 × 3) = 38.
- Chercher ensuite à dessiner une figure ayant ce périmètre.
- Voici un exemple :



Attribution des points

4 Dessin correct d'une figure de 38 cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

3 Dessin correct d'une figure de 38 cm de périmètre avec indication du périmètre mais sans le calcul
Dessin correct d'une figure de 36 cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

2 Dessin correct d'une figure de 38 cm de périmètre sans indication ni calcul du périmètre
Ou dessin correct d'une figure de 38 cm de périmètre mais avec erreur de calcul du périmètre
Ou dessin correct d'une figure de 36 cm avec indication du périmètre mais sans le calcul
Ou dessin correct d'une figure de 34 cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

1 Dessin correct d'une figure de 34 cm avec indication du périmètre mais sans le calcul
Ou début de recherche cohérente (dessin de plusieurs figures respectant les contraintes sans aboutir à une conclusion)

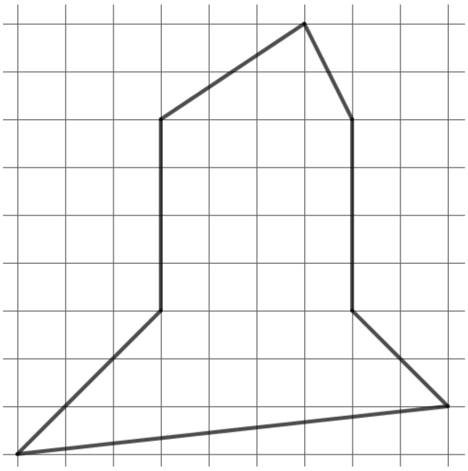
0 Incompréhension du problème (dessin de figures qui ne respectent pas les règles)

Niveaux : 7, 8

Origine : Parma

14. DES TRIANGLES DANS UN POLYGONE (II) (Cat. 7, 8)

Il y a beaucoup de façons différentes de partager cette figure en 4 triangles.



Trouvez huit partages différents de cette figure en 4 triangles.

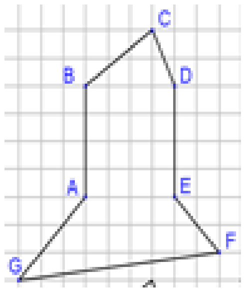
Dessinez-les sur les figures de la feuille jointe.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver 8 décompositions différentes en quatre triangles d'un heptagone concave dessiné sur quadrillage.

Analyse de la tâche



- Comprendre que pour faire apparaitre des triangles, il faut relier des sommets de l'heptagone ou prolonger des côtés parmi [GA], [EF], [DE] ou [BA].
- Remarquer que G, A et D sont alignés et que B, E et F le sont aussi donc prolonger [GA] et prolonger [EF] produit des découpages analogues à respectivement tracer [AD] et tracer [BE].

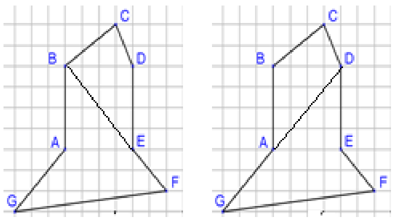
Recherche par essais et ajustements :

- Tracer des segments reliant des sommets ou en prolongeant des côtés de la figure et conserver ceux qui permettent d'obtenir quatre triangles intérieurs à la figure.
- Faire plusieurs essais et les comparer à ceux déjà trouvés.

Ou

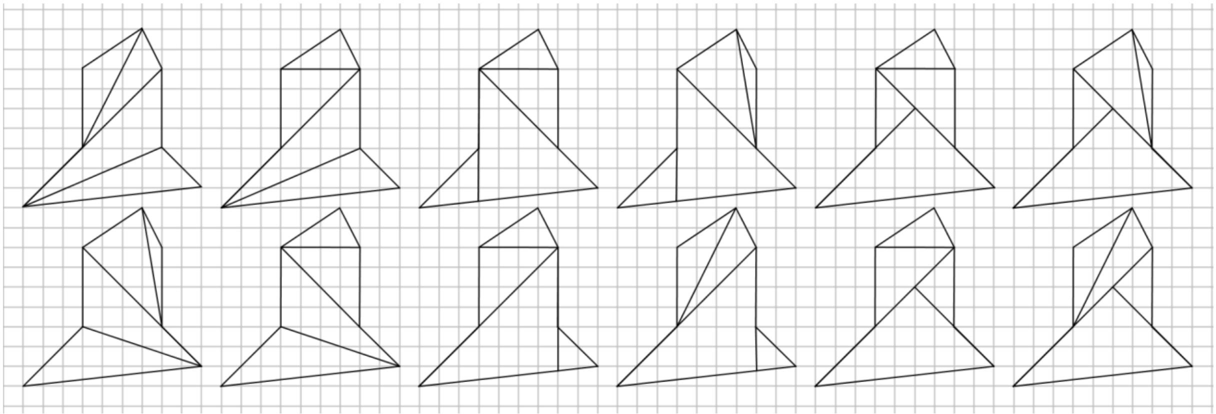
Recherche organisée :

- Avoir l'intuition qu'il est plus simple de partager un quadrilatère en triangles que de partager directement la figure qui est donnée.
- Rechercher toutes les façons de partager la figure en quadrilatères (il y en a deux).



- Pour chacun des deux cas :
  - partager chaque quadrilatère en deux triangles ;
  - chercher différentes façons de partager les deux quadrilatères pour obtenir 8 partages différents de la figure donnée.

Ci-dessous sont dessinées les 12 décompositions possibles de l'heptagone.



Attribution des points

4 8 découpages corrects différents

3 7 découpages corrects différents avec éventuellement une erreur ou un doublon
Ou 6 découpages corrects différents avec éventuellement des doublons, mais sans erreur

2 6 découpages corrects différents avec une ou deux erreurs et éventuellement un doublon
Ou 5 ou 4 découpages corrects différents avec au plus une erreur et éventuellement des doublons

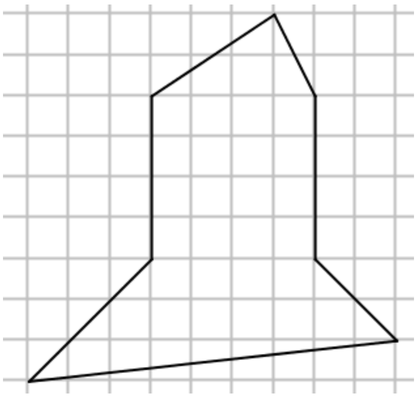
1 5 ou 4 découpages corrects différents avec 2 erreurs ou plus et éventuellement des doublons
Ou de 1 à 3 découpages corrects différents-avec éventuellement des doublons ou des erreurs

0 Incompréhension du problème : aucun découpage en 4 triangles

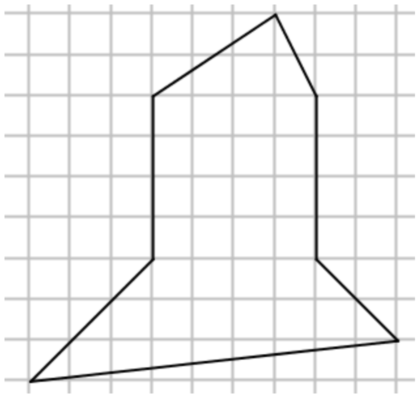
Niveaux : 7, 8

Origine : Lyon

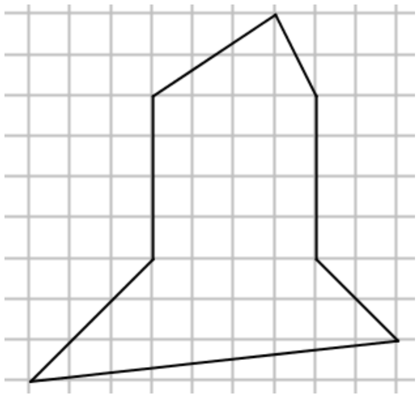
Problème 14 – Feuille réponse



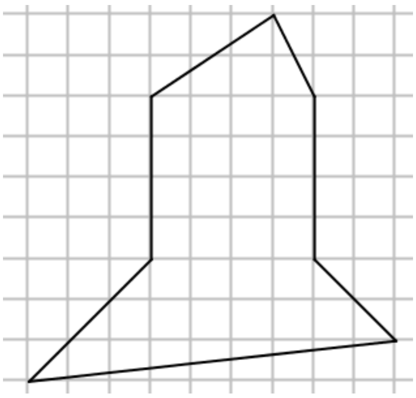
Partage 1



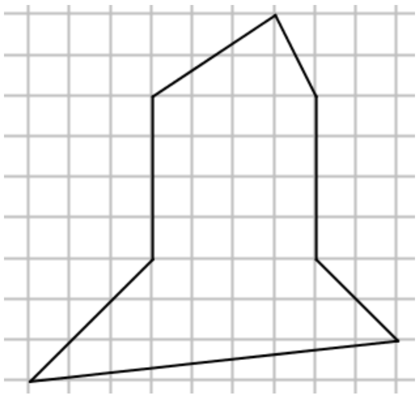
Partage 2



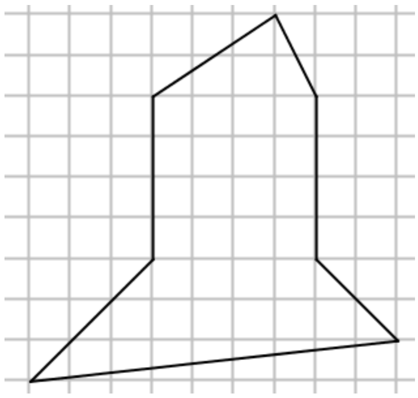
Partage 3



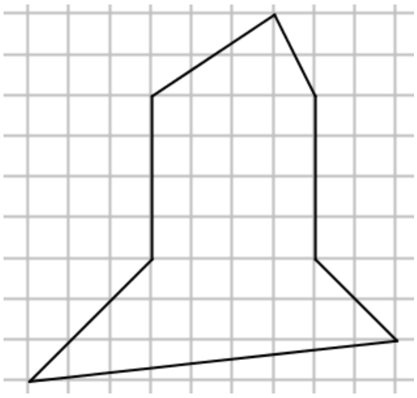
Partage 4



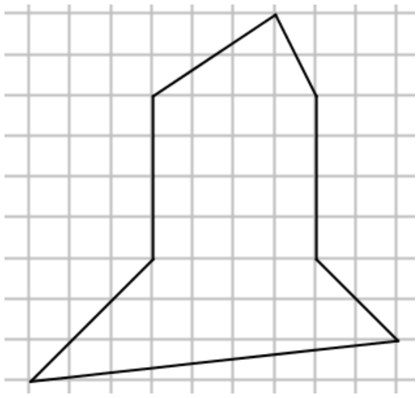
Partage 5



Partage 6



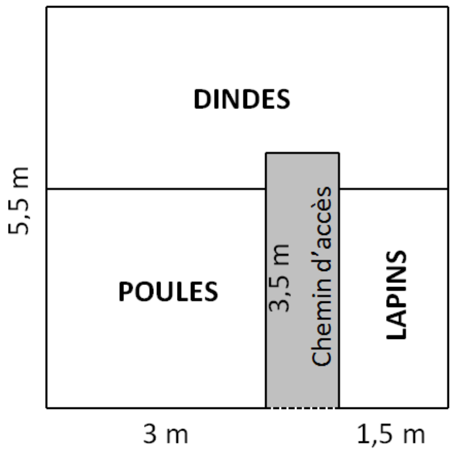
Partage 7



Partage 8

15. L'ENCLOS DES ANIMAUX (Cat. 8, 9, 10)

Carlos a construit pour ses animaux un enclos carré comme le montre le dessin.



Il a partagé l'enclos en quatre zones :

- Une zone de forme carrée pour les poules ;
- Une zone de forme rectangulaire pour les lapins ;
- Une zone pour les dindes ;
- Et un chemin d'accès aux trois zones de 3,5 m de longueur.

Carlos se rend compte que le chemin d'accès est un peu étroit. Il décide donc d'agrandir tout l'enclos. Dans le nouvel enclos, la largeur du chemin d'accès est 1,80 m et les dimensions de chaque zone ont été augmentées dans les mêmes proportions.

Quelle est l'aire de la nouvelle zone pour les dindes ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver l'aire d'une figure agrandie à partir des dimensions indiquées sur la figure d'origine, le rapport d'agrandissement étant déterminé à partir de la donnée d'une des dimensions de l'agrandissement.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nouvel enclos est un agrandissement de l'enclos représenté sur le dessin : l'enclos et chaque zone auront la même forme mais pas les mêmes dimensions.
- Comprendre que les seules informations numériques dont on dispose sur l'agrandissement sont la nouvelle largeur du chemin d'accès (1,80 m) et sa largeur initiale qui peut être déterminée à partir des autres données.
- Savoir interpréter la phrase « en augmentant les dimensions de chaque zone dans les mêmes proportions » : le rapport entre les dimensions correspondantes est constant ou toutes les dimensions sont multipliées par un même nombre.
- Déterminer le coefficient d'agrandissement ou le rapport constant (1,8) à partir de la largeur initiale et de la nouvelle largeur du chemin d'accès. (Il est également possible de considérer que chaque dimension doit être augmentée de 80 %).
- Comprendre que toutes les dimensions initiales des quatre zones peuvent être déterminées à partir des informations portées sur le dessin.
- Considérer la zone réservée aux dindes comme étant la réunion d'un grand rectangle et de deux petits rectangles ou comme étant un rectangle amputé d'un petit rectangle. Déterminer les dimensions initiales de cette figure (2 m x 5,5 m + 0,5 m x 3 m + 0,5 m x 1,5 m ou 2,5 m x 5,5 m – 1 m x 0,5 m). Utiliser les proportions ou le coefficient d'agrandissement pour calculer les dimensions de la figure agrandie (3,6 m x 9,9 m + 0,9 m x 5,4 m + 0,9 m x 2,7 m ou 4,5 m x 9,9 m – 1,8 m x 0,9 m). Calculer l'aire de la figure agrandie : 42,93 m^2 (35,64 m^2 + 4,86 m^2 + 2,43 m^2 ou 44,55 m^2 – 1,62 m^2).

Ou

- Considérer l'aire de la zone réservée aux dindes comme étant la différence entre l'aire de l'enclos et de la somme des 3 autres zones qui sont un carré et deux rectangles. Déterminer la largeur initiale du chemin d'accès, les autres dimensions étant connues. Calculer les dimensions de l'enclos et de ces zones agrandies (9,9 m x 9,9 m ; 5,4 m x 5,4 m ; 1,8 m x 6,3 m ; 2,7 m x 5,4 m) puis leurs aires (98,01 m^2 ; 29,16 m^2 ; 11,34 m^2 ; 14,58 m^2). En déduire l'aire de la zone réservée aux dindes 42,93 m^2 [98,01 m^2 - (29,16 m^2 + 11,34 m^2 + 14,58 m^2)].

Ou

- Après avoir déterminé l'aire de la zone réservée aux dindes dans l'enclos initial : 13,25 m^2 [11 m^2 + 1,5 m^2 + 0,75 m^2 ou 13,75 m^2 – 0,5 m^2 ou 30,25 m^2 – (9 m^2 +3,5 m^2 + 4,5 m^2)], appliquer la propriété « dans un agrandissement, si les dimensions sont multipliées par k, les aires le sont par k^2 ». L'aire de la zone réservée aux dindes dans l'enclos agrandie est 42,93 m^2 (13,25 m^2 x 1,8^2).

Attribution des points

4 Réponse correcte (42,93 m^2) avec détermination des dimensions, calcul des aires et énonciation de la proportionnalité des dimensions ou de la propriété relative au rapport d'aires dans un agrandissement

3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires (telles que présence des calculs mais propriété utilisée d'un agrandissement non explicitée ou propriété explicitée, mais absence de certains calculs)

2 Réponse correcte sans explication ni justification

Ou calculs corrects de toutes les dimensions utiles au calcul de l'aire réservée aux dindes dans l'enclos agrandi (avec présence ou absence de calculs d'aires, exacts ou erronés)

Ou réponse erronée consécutive à une ou plusieurs erreurs de calcul mais raisonnement correct et bien explicité

1 Début de recherche correct (par exemple : utilisation de la proportionnalité pour déterminer au moins trois des dimensions sur l'agrandissement)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Puglia

16. PANNEAU DÉCORATIF (Cat. 8, 9, 10)

Aurore a trouvé des chutes de tapisserie de formes rectangulaires qui lui plaisent et qui ont des dimensions très particulières : 3 m sur 1 m pour la plus grande ; puis 1,5 m sur 1 m ; puis 1,5 m sur 0,5 m; puis 0,75 m sur 0,5 m ; … et ainsi de suite avec la même régularité.

Elle décide de les utiliser pour recouvrir un panneau rectangulaire de 3 m sur 2 m qu'elle placera sur une paroi de son restaurant.

Aurore utilise une seule chute de chaque dimension. Elle colle les chutes sur le panneau, sans qu'elles ne se superposent et sans laisser d'espaces entre elles.

Combien de chutes Aurore aura-t-elle collées sur le panneau rectangulaire quand il lui restera moins de 1 cm² à recouvrir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

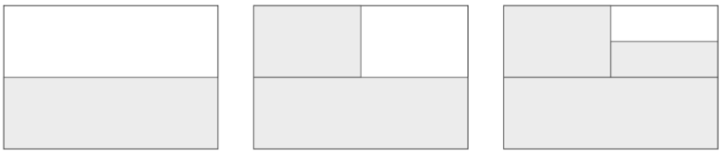
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans une progression géométrique de raison 1/2 partant de 60 000, déterminer le premier des termes qui est inférieur à 1, dans un contexte géométrique d'une suite de rectangles dont l'aire de chacun est la moitié de celle de du précédent.

Analyse de la tâche

- Percevoir les régularités de la suite des dimensions des chutes : d'un rectangle au suivant, alternativement, une dimension est conservée alors que l'autre est la moitié de la précédente, (en partant de la première chute dont la longueur est la même que celle du panneau et la largeur est la moitié de celle du panneau).
  On peut se représenter la situation mentalement et/ou avec un dessin des premières chutes disposées sur le panneau :



- Comprendre que l'aire de la première chute est la moitié de celle du panneau - ou 1/2 en écriture fractionnaire – et est égale à celle de la partie encore à recouvrir ; puis l'aire de la seconde chute est la moitié de celle de la première et ainsi de suite.
- Comprendre que l'aire de chaque chute ajoutée est la moitié de celle de la précédente et qu'elle est égale à celle de la partie encore à recouvrir. Puis comprendre que le recouvrement s'arrêtera quand la partie restant à recouvrir sera celle qui aura une aire de moins de 1 cm².
- Se rendre compte que pour effectuer les calculs, il serait opportun de transformer initialement les 6 m² de l'aire du panneau en 60 000 cm²
- On peut alors raisonner sur la partie à recouvrir à partir de 30 000 (correspondant à la première chute), diviser successivement par 2 les suivantes jusqu'à obtenir le premier nombre inférieur à 1, qui correspond à la 16e chute.

Ou

- Raisonner sur la partie déjà recouverte et additionner les aires des chutes ajoutées progressivement à partir de la première, d'aire 30 000 cm² : 30 000 + 15 000 + 7 500 + 3 750 + 1 875 + 937,5 + 468,75, ... et comprendre qu'il manquera moins de 1 cm² quand la somme dépassera 59 999 et que le nombre de chutes est celui des termes de la somme. Avec le 16e terme (0,915527344…) on obtient :
  30 000 + 15 000 + 7 500 + 3 750 + … + 0,915… = 59 999, 084…
  Ainsi Aurore a besoin de 16 chutes pour qu'il reste moins de 1 cm² à recouvrir.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Aurore a besoin de 16 chutes) avec des explications claires et complètes (par exemple par divisons successives par 2 : 60 000, 30 000, 15 000, jusqu'à 0.915… ou par sommes successives des aires des chutes comme dans l'exemple ci-dessus)

3 Réponse correcte avec des explications lacunaires (sans le détail des aires successives proches de 1 ou de 60 000) mais dont on comprend le raisonnement

Ou réponse « Aurore a besoin de 15 ou 17 chutes » suite à une erreur de dénombrement des chutes, mais avec des explications claires

2 Réponse correcte sans explication

Ou, un raisonnement bien expliqué, à partir d'un dessin ou d'une suite de calculs, mais qui n'aboutit pas à la réponse

Ou réponse cohérente mais erronée due par exemple à une erreur dans la transformation de m^2 en cm^2

1 Début de recherche correct (par exemple, esquisse d'un dessin avec au moins quatre termes de la progression ou au moins quatre valeurs calculées à la calculatrice …)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : G0A0 (Groupe de travail « Zero alla zero »)

17. DÉCIMAUX COLORIÉS (Cat. 8, 9, 10)

À chaque fois qu'il doit calculer une division, Nicolas attrape des boutons sur tout le corps.

Il décide alors de construire avec un programme de son ordinateur, un tableau où dans chaque case, viendra s'écrire le quotient du nombre écrit en haut de sa colonne (dans les cases grises) par le nombre écrit à gauche de sa ligne (dans les cases grises).

Puis, comme certains nombres qui apparaissent sont trop longs et prennent trop de place dans les cases, Nicolas demande à son programme de n'écrire que les deux premières décimales de chaque quotient, en sachant que certains sont exacts et que les autres ne sont que des approximations.

Voici ce qu'il obtient pour les 26 premières lignes et 12 premières colonnes de son tableau :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,0	11,00	12,00
2	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00
3	0,33	0,67	1,00	1,33	1,67	2,00	2,33	2,67	3,00	3,33	3,67	4,00
4	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
5	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40
6	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1,00	1,17	1,33	1,50	1,67	1,83	2,00
7	0,14	0,29	0,43	0,57	0,71	0,86	1,00	1,14	1,29	1,43	1,57	1,71
8	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13	1,25	1,38	1,50
9	0,11	0,22	0,33	0,44	0,56	0,67	0,78	0,89	1,00	1,11	1,22	1,33
10	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
11	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,55	0,64	0,73	0,82	0,91	1,00	1,09
12	0,08	0,17	0,25	0,33	0,42	0,50	0,58	0,67	0,75	0,83	0,92	1,00
13	0,08	0,15	0,23	0,31	0,38	0,46	0,54	0,62	0,69	0,77	0,85	0,92
14	0,07	0,14	0,21	0,29	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71	0,79	0,86
15	0,07	0,13	0,20	0,27	0,33	0,40	0,47	0,53	0,60	0,67	0,73	0,80
16	0,06	0,13	0,19	0,25	0,31	0,38	0,44	0,50	0,56	0,63	0,69	0,75
17	0,06	0,12	0,18	0,24	0,29	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59	0,65	0,71
18	0,06	0,11	0,17	0,22	0,28	0,33	0,39	0,44	0,50	0,56	0,61	0,67
19	0,05	0,11	0,16	0,21	0,26	0,32	0,37	0,42	0,47	0,53	0,58	0,63
20	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
21	0,05	0,10	0,14	0,19	0,24	0,29	0,33	0,38	0,43	0,48	0,52	0,57
22	0,05	0,09	0,14	0,18	0,23	0,27	0,32	0,36	0,41	0,45	0,50	0,55
23	0,04	0,09	0,13	0,17	0,22	0,26	0,30	0,35	0,39	0,43	0,48	0,52
24	0,04	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,29	0,33	0,38	0,42	0,46	0,50
25	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48
26	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31	0,35	0,38	0,42	0,46

Pour distinguer les quotients exacts des approximations, Nicolas décide de colorier les cases :

- en rouge, tous les quotients exacts écrits avec deux chiffres après la virgule (par exemple la 7e case de la 5e ligne car le quotient 7 : 5 = 1,40 est exact)

- en bleu tous les autres quotients qui seraient exacts s'il demandait à son programme de les écrire avec trois chiffres après la virgule, (par exemple la 6e case de la 16e ligne car le quotient 6 : 16 = 0,375 est exact alors que 0,38 n'est qu'une approximation).
- en vert tous les autres quotients qui seraient exacts s'il demandait à son programme de les écrire avec plus de trois chiffres après la virgule.
- en jaune tous les autres quotients que le programme ne pourrait jamais écrire car ils auraient une infinité de chiffres après la virgule.

En coloriant son tableau Nicolas observe de nombreuses régularités.

Combien de cases de chaque couleur y aura-t-il dans le tableau ci-dessus lorsque Nicolas aura colorié toutes ses cases ?

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans la table de division N × N, où les quotients sont écrits sous forme de nombres décimaux à deux décimales, reconnaître les quotients exacts, ceux qui seraient exacts s'ils étaient écrits avec trois décimales, ceux qui seraient exacts s'ils étaient écrits avec plus de trois décimales et ceux qui ne sont pas des nombres décimaux.

Analyse de la tâche

- Observer la table, et la manière uniforme avec laquelle le programme affiche les résultats des divisions (toujours avec deux chiffres après la virgule, même si ce n'est pas nécessaire) et constater que la tâche consiste à distinguer les quotients exacts des approximations.
- Découvrir les très nombreuses régularités et les lier à l'opération de division. Par exemple les quotients de la première ligne sont les résultats de divisions par 1 donc des nombres naturels, ceux de la 2e ligne sont alternativement naturels ou se terminant par 5 comme premier chiffre après la virgule, ceux de la troisième ligne sont des nombres naturels (3/3, 6/3, 9/3, 12/3) ou des rationnels non décimaux …, ceux de la 16e sont des nombres décimaux : nombres avec deux chiffres après la virgule (4/16, 8/16 et 12/16), nombres avec trois chiffres après la virgule (2/16, 6/16 et 10/16) , nombres avec quatre chiffres après la virgule (1/16, 3/16, 5/16, 7/16, 9/16, 10/16 et 11/16) …
- On peut reconnaitre comme non décimaux (donc ayant un nombre illimité de décimales), les nombres qui sont égaux à des fractions dont le dénominateur, après simplification, ne se décompose pas uniquement avec 2 et 5 (par exemple $5/24 = 1/2^3$ x 3, mais pas $6/24 = 1/4 = 1/2^2$).

- Une manière efficace d'organiser les calculs est donc de travailler ligne par ligne :

lignes	rouge (D2)	bleu (D3)	vert (D > 3)	jaune (non D)
1, 2, 4, 5, 10, 20, 25	7 × 12	0	0	0
3 et 6	2 × 4	0	0	2 × 8
7, 9, 11	3 × 1	0	0	3 × 11
8	6	6	0	0
12, 15	2 × 4	0	0	2 × 8
13, 17, 19, 21, 23, 26	0	0	0	6 × 12
14, 18, 22	3 × 1	0	0	3 × 11
16	3	3	6	0
24	2	2	0	8
total	117	11	6	178

Il y a donc 178 cases coloriées en jaune (nombres non décimaux), puis 117 cases en rouge, 11 cases en bleu et, en dernier seulement 6 cases en vert (décimaux à plus de trois décimales, quatre en l'occurrence).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00	11,00	12,00
2	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00
3	0,33	0,67	1,00	1,33	1,67	2,00	2,33	2,67	3,00	3,33	3,67	4,00
4	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
5	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40
6	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1,00	1,17	1,33	1,50	1,67	1,83	2,00
7	0,14	0,29	0,43	0,57	0,71	0,86	1,00	1,14	1,29	1,43	1,57	1,71
8	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13	1,25	1,38	1,50
9	0,11	0,22	0,33	0,44	0,56	0,67	0,78	0,89	1,00	1,11	1,22	1,33
10	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
11	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,55	0,64	0,73	0,82	0,91	1,00	1,09
12	0,08	0,17	0,25	0,33	0,42	0,50	0,58	0,67	0,75	0,83	0,92	1,00
13	0,08	0,15	0,23	0,31	0,38	0,46	0,54	0,62	0,69	0,77	0,85	0,92
14	0,07	0,14	0,21	0,29	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71	0,79	0,86
15	0,07	0,13	0,20	0,27	0,33	0,40	0,47	0,53	0,60	0,67	0,73	0,80
16	0,06	0,13	0,19	0,25	0,31	0,38	0,44	0,50	0,56	0,63	0,69	0,75
17	0,06	0,12	0,18	0,24	0,29	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59	0,65	0,71
18	0,06	0,11	0,17	0,22	0,28	0,33	0,39	0,44	0,50	0,56	0,61	0,67
19	0,05	0,11	0,16	0,21	0,26	0,32	0,37	0,42	0,47	0,53	0,58	0,63
20	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
21	0,05	0,10	0,14	0,19	0,24	0,29	0,33	0,38	0,43	0,48	0,52	0,57
22	0,05	0,09	0,14	0,18	0,23	0,27	0,32	0,36	0,41	0,45	0,50	0,55
23	0,04	0,09	0,13	0,17	0,22	0,26	0,30	0,35	0,39	0,43	0,48	0,52
24	0,04	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,29	0,33	0,38	0,42	0,46	0,50
25	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48
26	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31	0,35	0,38	0,42	0,46

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : (178 cases jaunes, 117 rouges, 11 bleues et 6 vertes) ou les 26 lignes coloriées correctement. On admet une ou deux erreurs au maximum (inattention, erreur de report).

3 Réponse presque correcte et complète avec quelques imprécisions dans les nombres de cases pour chaque couleur (178 ± 5, 117 ± 5, 11 et 6 ± 3).

Ou trois des couleurs correctes mais des confusions systématiques sur les cases de couleur verte ou de couleur bleue.

2 Réponse approximative mais avec des imprécisions plus importantes dans les nombres de cases pour chaque couleur (178 ± 15, 117 ± 15, 11 et 6 ± 5).

Ou réponse exacte pour deux des quatre couleurs de cases (par exemple 178 jaunes et 6 vertes).

1 Réponse très incomplète qui montre un début correct de recherche, par exemple les 7 lignes entières en rouge et les 6 lignes entières en jaune, avec de très nombreuses erreurs dans les autres lignes.

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : G0A0 (Groupe de travail « Zero alla zero »).

18. PREMIÈRE ACTION EN BOURSE (Cat. 9, 10)

Christophe est allé travailler durant ses vacances scolaires et il a fait quelques économies. Il décide alors de placer une partie de son argent en bourse et son banquier lui recommande d'acheter une action de l'entreprise TrSA (Transalpinia S.A.), spécialisée dans la production de problèmes de mathématiques.

Christophe achète donc une action TrSA au début du mois de septembre et suit son évolution. A la fin du mois, sa valeur a diminué de 5%. Un mois plus tard, à la fin d'octobre, la valeur de l'action a encore diminué de 8% par rapport à la fin de septembre. Christophe est bien déçu.

Mais à la fin du mois de novembre, la valeur de l'action a augmenté de 13% par rapport à la fin du mois précédent. Christophe, réconforté, pense qu'il ne va pas perdre trop d'argent s'il décide de revendre immédiatement son action.

Il y a maintenant une différence de 20,25 € exactement, entre le prix d'achat du début de septembre, qui était un nombre entier d'euros, et le prix de vente à la fin de novembre.

Quel était le prix d'achat de l'action TrSA, arrondi à l'euro près ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et donnez tous les détails de vos calculs

---

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le prix initial d'une action qui, après deux baisses successives de 5 % puis de 8 % et suivies d'une hausse de 13%, a subi une différence de valeur de 20,25 € avec sa valeur initiale.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a quatre valeurs à prendre en compte et trois changements de valeurs et que ceux-ci sont calculés chaque fois à partir de la valeur précédente : le premier changement indique que la valeur initiale a diminué de 5 %, le deuxième changement signifie que la seconde valeur diminue de 8% (après un mois). Le troisième changement est une augmentation de la troisième la valeur de 13%. (Par conséquent il faut éviter d'additionner les trois modifications, ce qui donnerait un changement global nul : - 5 – 8 + 13 = 0)
- Se rappeler ou découvrir que les opérations « diminuer de 5% », « diminuer de 8 % » et « augmenter de 13% » correspondent aux opérations respectives « x (100 – 5)/100 », « x (100 – 8)/100 » et « x (100 + 13)/100) » ou « multiplier par 0,95 ou 95/100 ; par 0.92 ou 92/100 et par 1,13 ou 113/100.
- Comprendre enfin que pour effectuer ces calculs, il faudrait connaître la valeur initiale de l'action. C'est ce qu'il faut chercher.
- **Procédure par essais, pas à pas** : Fixer des valeurs initiales de l'action, en effectuant les trois transformations proportionnelles successives de facteurs 0,95 ; 0.92 et 1,13. Faire suivre du calcul de la différence entre le prix initial et le prix final qui doit être 20,25. Par exemple :

Prix initial	Prix après baisse 5%	Prix après baisse 8 %	Prix après augm 13%	Différence
1000	950	874,00	987,62	12,38
1500	1425	1311,00	1481,43	18,57
1600	1520	1398,40	1580,19	19,81
1630	1548,5	1424,62	1609,82	20,18
1635	1553,25	1428,99	1614,76	20,24
1636	**1554,2**	**1429,86**	**1615,75**	**20,25**
1637	1555,15	1430,74	1616,73	20,27

- **Procédure par essais, globale** : Au cas où les trois transformations sont composées 0,95 × 0,92 × 1,13 = 0,98762, le tableau ci-dessus présentera deux colonnes de moins.

  Finalement, retenir les valeurs de l'action qui correspondent à une différence (baisse) de 20,25 € dans le tableau, soit de 1636 €.
- **Procédure algébrique** (la valeur initiale étant désignée par p) :
  la valeur après les trois modification (P) est : $P = 0{,}95 \times 0{,}92 \times 1{,}13p = 0{,}98762p$.
  la différence entre les deux valeurs est : $p - P = p - 0{,}98762p = p(1 - 0{,}89762) = 0{,}01238p$.
  La valeur initiale p est la solution de l'équation $20{,}25 = 0{,}01238p$ ou $p = 20{,}25/0{,}01238 = 1\,635{,}702\ldots$ qui s'arrondit à 1 636 en euros.

Attribution des points

4. Réponse correcte (1 636 €) avec des explications claires et détaillées (par exemple, tableau de nombres avec essais successifs ou résolution algébrique)
3. Réponse correcte avec des explications incomplètes (sans tous les détails des calculs)
   Ou réponse 1 635 ou 1 637, due à une erreur d'approximation avec des explications claires et détaillées
2. Réponse correcte sans aucune explication
   Ou réponse entière ou décimale comprise dans l'intervalle [1600 ; 1650] déterminée par des essais organisés explicites avec erreur plus ou moins importante d'approximation
   Ou réponse erronée due à une erreur dans le calcul des différentes transformations 0,95 ; 0,92 et 1,13 mais procédure exacte
1 Début de recherche cohérente (par exemple, quelques essais inaboutis ou ne prenant en compte qu'une ou deux des transformations)
0 Incompréhension du problème ou utilisation de l'argument « 5% + 8% - 13% = 0 % »

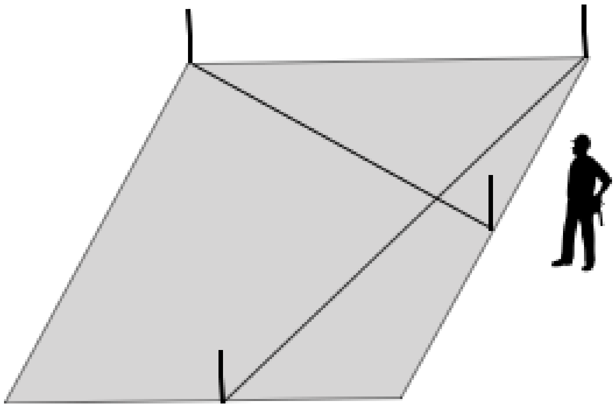
Niveaux : 9, 10

Origine : GTCP (Groupe de travail Calcul et proportionnalité)

19. UN APPRENTI GÉOMÈTRE (Cat. 9, 10)

Un géomètre a planté quatre piquets, deux aux sommets d'un terrain carré et les deux autres au milieu de deux de ses cotés. Il a attaché ensuite des fils aux pieds de ces piquets et les a tendus comme l'indique la figure ci-dessous.

Ce géomètre se tourne ensuite vers son apprenti et lui demande s'il peut sans mesurer dire quelles sont les mesures des angles formés par les deux fils qui se croisent.



Répondez à la question du géomètre et donnez vos justifications.

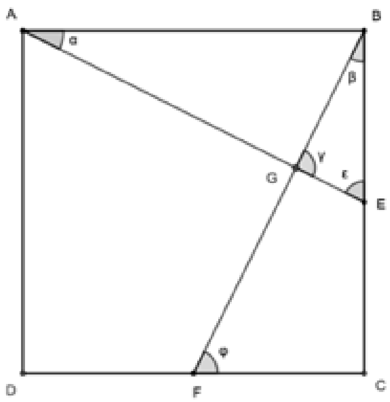
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les mesures des angles formés par deux segments qui joignent le sommet d'un carré au milieu de l'un de ses côtés.

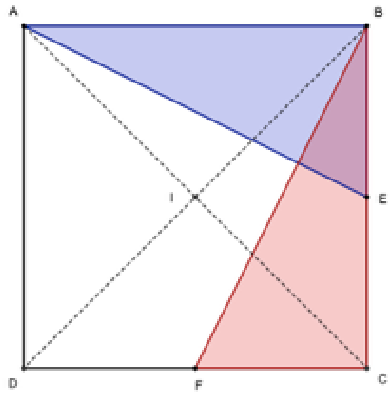
Analyse de la tâche

- Réaliser que la figure de l'énoncé est en perspective et qu'il est préférable de commencer par faire une figure en construisant un carré et en nommant les points et les angles de la figure.



- En utilisant à la figure ci-contre, considérer les triangles ABE et BCF respectivement rectangles en B et C et dont les hypoténuses sont formées par les deux fils qui se croisent ;
  - chacun de ces deux triangles étant rectangle, préciser que $\alpha + \varepsilon = 90°$ et $\beta + \gamma = 90°$;
  - établir que les deux triangles sont égaux car ils ont un angle de même meure compris entre deux côtés égaux ;
  - en déduire les égalités suivantes $\beta = \alpha$ et $\gamma = \varepsilon$. (propriétés des triangles égaux)
  - en déduire que dans le triangle BGE, β et ε sont complémentaires et qu'ainsi le troisième angle γ du triangle mesure 90°.
  - en conclure que les deux droites sont perpendiculaires et donc que les 4 angles mesurent 90°.

Ou



- Considérer la rotation de centre I (point d'intersection des diagonales du terrain) et d'angle 90° (sens des aiguilles d'une montre) et en utilisant une figure analogue à celle proposée ci-contre
  - établir que cette rotation transforme A en B (propriétés des diagonales du carré) ;
  - établir qu'elle transforme E en F (propriétés des axes de symétrie du carré ou conservation des milieux par la rotation) ;
  - en déduire que la droite (BF) est l'image de la droite (AE) par cette rotation ;
  - en conclure que ces deux droites sont perpendiculaires.

Attribution des points

4 La réponse correcte (les angles formés par les deux fils qui se croisent sont des angles droits) avec une justification correcte et complète (avec les diverses étapes de la justification)

3 La réponse est correcte mais une étape de la justification n'est pas justifiée (un passage est pris pour acquis)

2 La réponse correcte mais deux étapes de la justification ne sont pas justifiées

1 Suite de constats très peu ou pas justifiés mais qui témoignent que les élèves ont compris quelques étapes du raisonnement

0 Incompréhension du problème ou réponse correcte sans aucune trace de justification

Niveaux : 9, 10

Origine : GTGP (Groupe de travail Géométrie plane)

20. LOTERIES (Cat. 9, 10)

Deux amis, Pierre et Samuel, ont décidé de participer à trois loteries en faveur d'œuvres de charité en achetant quelques billets. Les couleurs des billets des trois loteries sont : bleu, jaune ou vert. Les billets ont des prix différents selon la couleur et les prix exprimés en euros, sont des nombres entiers.

La semaine dernière, Pierre a acheté 1 billet bleu, 3 jaunes et 7 verts pour un prix total de 44 euros, alors que Samuel a acheté 1 billet bleu, 4 jaunes et 10 verts pour un prix total de 58 euros.

Aujourd'hui, dernier jour des loteries, ils achètent encore chacun des billets.

- Pierre achète un billet bleu, un billet jaune et un billet vert.
- Samuel achète deux billets bleus, trois billets jaunes et cinq billets verts.

Combien chacun des deux amis a-t-il dépensé pour ce dernier achat de billets ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Étant donné dans **N** un système de deux équations du premier degré à trois inconnues, déterminer les valeurs numériques de deux autres combinaisons à coefficients entiers naturels de ces trois mêmes inconnues.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les billets des trois loteries ont des prix différents inconnus et qu'on ne connaît que la dépense totale pour l'acquisition de deux quantités différentes de billets des trois types et qu'il s'agit de trouver la dépense de chacun des deux amis pour l'achat des deux autres combinaisons des trois types de billets.
- Exprimer sous forme synthétique les informations relatives au premier achat de billets, par exemple :
  P_1 : B + 3J + 7V = 44 S_1 : B + 4J + 10V = 58 (montants connus)
  et au deuxième achat :
  P_2 : B + J + V = ? S_2 : 2B + 3J + 5V = ? (montants inconnus)
  Déduire de la relation S_1 que la valeur de V ne peut pas excéder 5 car si V = 6, 10V serait supérieur à 58.
- Procéder par essais en attribuant par exemple une valeur au billet vert (c'est celui qui est présent en plus grand nombre dans les deux quantités dont les prix sont connus). Les valeurs à envisager pour V sont donc 1, 2, 3, 4, 5.
  - Si V = 1, alors B + 4J = 48 et J peut prendre les valeurs 11, 10, 9 ……, 1 ; les valeurs correspondantes de B sont 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44.
  - Tester chaque triplet de valeurs (B, J, 1) dans P_1. L'égalité n'est vérifiée que pour B = 4 et J = 11.
  - A partir de là, calculer les prix payés par Pierre et Samuel pour leur second achat :
    P_2 : B + J + V = 4 + 11 + 1 = 16 (euros) S_2 : 2B + 3J + 5 V = 8 + 33 + 5 = 46 (euros)
  - Procéder de même pour les autres valeurs de V.

  On obtient 4 solutions (V = 1, J =11, B = 4) ; (V = 2, J = 8, B = 6) ; (V = 3, J = 5, B = 8) ; (V = 4, J = 2, B = 10) qui conduisent toutes à P_2 : B + J + V = 16 (euros) et S_2 : 2B + 3J + 5 V = 46 (euros).

Ou

- Chercher à combiner les deux relations connues S_1 et P_1 afin d'obtenir d'autres égalités. En les soustrayant membres à membres on obtient J + 3V = 14.
- Procéder ensuite par essais en attribuant successivement à V les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5, ce qui conduit aux solutions (V = 1, J =11) ; (V = 2, J = 8) ; (V = 3, J = 5); (V = 4, J = 2).
  - Reporter ces valeurs dans S_1 ou P_1 pour déterminer les valeurs correspondantes de B : 4, 6, 8 et 10
  - Déterminer ensuite les prix payés par Pierre et Samuel pour leurs seconds achats.

Ou

- Après avoir trouvé que J + 3V = 14, en introduisant cette relation dans le premier membre de S_1, arriver à :
  B + 4J + 10 V = B + J + (3G + 9V) + V = B + J + 3(G + V) + V = B + J + 3 × 14 + V = 58
  D'où on tire la valeur P_2 : B + J + V = 58 – (3 × 14) = 58 – 42 = 16.
- Procéder de façon analogue pour déterminer la valeur de S_2 :
- 2B + 3J + 5V = 2B + (J + 3V) + 2J + 2V = (2B + 2J + 2V) + (J + 3V) = 2 × 16 + 14 = 32 + 14 = 46.

Ou

- Se rendre compte, après quelques essais, que les expressions P_2 et S_2 peuvent être obtenues par des combinaisons linéaires opportunes de P_1 et S_1 et qu'il est donc possible de déterminer le coût total correspondant de chacune d'elles. On a en effet :
  P_2 : $B + J + V = 3(B + 3J + 7V) – 2(B + 4J + 10V) = 3P_1 – 2S_1 = 3 \times 44 – 2 \times 58 = 16$
  S_2 : $2B + 3J + 5V = 5(B + 3J + 7V) – 3(B + 4J + 10V) = 5 P_1 – 3S_1 = 5 \times 44 – 3 \times 58 = 46$

Attribution des points

4 Réponse correcte (Pierre dépense 16 euros et Samuel dépense 46 euros) avec explications claires et complètes de la procédure (résolution par combinaisons et essais ou substitutions, avec présence des calculs et vérification de l'invariance du montant des deux derniers achats, obtenue à partir des prix individuels de chaque billet)

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes (par exemple des passages mal explicités dans les procédures par combinaisons et substitutions ou oubli d'une solution parmi les quatre dans une procédure par essais, mais constat de l'invariance des montants des seconds achats)

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul mais avec explications claires et complètes de la procédure

Ou réponse correcte obtenue à partir du premier triplet de valeurs trouvées pour le prix de chaque type de billets sans considérer les trois autres possibilités

1 Début de raisonnement correct (par exemple, essai d'obtention des deux combinaisons dont les prix sont à déterminer à partir des deux dont les prix sont connus ou tentative inaboutie de résolution par essais)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Siena