Partie 1

Dialectique entre sens et techniques, l'exemple du calcul mental

Denis Butlen et Pascale Masselot

Ce texte se propose d'éclairer certains éléments des programmes de mathématiques, et notamment ceux qui concernent les apprentissages numériques au cycle 2, d'un double point de vue : celui des relations entre sens et techniques, et celui des passages et des étapes incontournables d'un enseignement de mathématiques à l'école primaire. Ces deux entrées sont à considérer lors de la conception d'une programmation cohérente sur un niveau, un cycle, ou même plusieurs. Il est important de prendre en compte les résultats des recherches en didactique des mathématiques pour d'une part, faire des choix *a priori* (programmations, progressions, temps accordé à l'apprentissage, situations de référence, marges de manœuvre des enseignants, etc.) et pour, d'autre part, comprendre ce qui se joue dans une classe lors de la mise en œuvre des séances (adaptations, régulations, aides, prise en compte des erreurs, des obstacles, outils pour les analyser, etc.).
Les liens qui existent entre maîtrise des techniques de calcul, connaissances sur les nombres et les opérations, et résolution de problèmes numériques sont d'abord précisés. Puis des exemples de situations de référence dans le domaine du calcul mental et de la numération sont développés.

Relations entre maîtrise de techniques de calcul, connaissances sur les nombres et les opérations, et résolution de problèmes arithmétiques

Cette première partie constitue une synthèse de résultats issus de plusieurs recherches menées sur ce thème. Ici la question du lien entre sens et techniques est étudiée plus particulièrement à partir de l'enseignement du calcul mental.
En effet, le calcul mental apparaît comme un champ d'expérience particulièrement riche pour la construction de connaissances relatives aux nombres et aux opérations. L'analyse des effets d'un enseignement de calcul mental, à l'école primaire et au collège a permis de montrer comment maîtrise de techniques de calcul et connaissances sur les nombres et les opérations, se développent en étroite relation.
Deux résultats suffisamment emblématiques permettent d'étayer cette idée. Le premier porte sur la manière dont connaissances sur les nombres et les opérations, et maîtrise de techniques de calcul mental, se développent dialectiquement. Le second concerne les effets d'une pratique de calcul mental sur les performances des élèves relatives à la résolution de problèmes numériques standards.

Retour au sommaire

Le paradoxe de l'automatisme

Pour expliciter ce paradoxe, il convient de distinguer procédure automatisée et automatisme.

Une procédure est automatisée quand elle est restituée par l'élève pour effectuer un calcul sans que celui–ci la reconstruise (Fischer 1987, Boule 1997).

Selon le contexte, un automatisme correspond soit au recours à un ensemble de procédures automatisées installées en mémoire et ayant fait l'objet d'un enseignement ou d'une pratique préalable ; soit à un comportement se caractérisant par une mobilisation quasi systématique de l'élève d'un seul type de procédure quelles que soient les données numériques du calcul à effectuer.

Par exemple pour effectuer le calcul de 45 + 17, les procédures possibles sont les suivantes :

– simulation mentale de l'algorithme écrit, l'élève « pose dans sa tête » l'opération en colonnes :

– utilisation de la décomposition additive canonique de l'un ou des deux termes :
45 + 17 = 45 + 10 +7 = 55 + 7 = 62 **ou** 45 + 17 = 40 + 5 + 10 + 7 = 50 + 12 = 62 ;

– utilisation d'une décomposition additive de l'un des termes s'appuyant sur un passage à une dizaine supérieure :
45 + 17 = 45 + 5 + 12 = 50 + 12 = 62 **ou** 45 + 15 + 2 = 60 + 2 = 62 **ou** 2 + 43 + 17 = 2 + 60 = 62 ;

– utilisation d'une décomposition soustractive de l'un des termes :
45 + 20 – 3 = 65 – 3 = 62 ;

– etc.

Ces procédures se différencient par les connaissances mobilisées, le coût en mémoire et en calcul. L'algorithme écrit simulé mentalement mobilise peu de connaissances sur les propriétés des nombres en jeu mais en revanche, il est très coûteux car il nécessite de mémoriser beaucoup de données. Les procédures basées sur des décompositions canoniques (nombres de dizaines et d'unités) nécessitent de connaître des décompositions souvent fréquentées. Plus économiques que la précédente, elles restent coûteuses. Les deux derniers types de procédures réduisent le coût en mémoire et en calculs intermédiaires mais nécessitent la disponibilité de décompositions moins souvent fréquentées. De plus, très liées aux nombres en jeu, elles ne peuvent être mobilisées dans tous les calculs.

Des recherches ont montré que les procédures mobilisées par les élèves de fin de cycle 2, sont l'algorithme écrit « posé dans la tête » (procédure quasi majoritaire), les différentes procédures mobilisant des décompositions canoniques et, beaucoup plus rarement, celles mobilisant d'autres décompositions additives ou soustractives. Ces dernières nécessitent une prise en compte de la spécificité des nombres intervenant dans le calcul et de leurs propriétés, leur domaine de validité est limité. Un enseignement spécifique préalable semble donc nécessaire.

Les élèves préfèrent, dans un premier temps, utiliser des procédures sûres (qui fonctionnent dans tous les cas et conduisent, à condition d'être menées à terme, au résultat attendu) mais coûteuses plutôt que des procédures mieux adaptées au calcul en jeu. De plus, les élèves les plus en difficulté en mathématiques se limitent davantage et plus longtemps aux premières. Ils font preuve de moins d'adaptabilité.

Sans un enseignement de calcul mental visant spécifiquement à combler le manque d'adaptabilité manifesté par ces élèves, deux dynamiques peuvent s'installer dans la classe. L'absence ou la présence de prérequis numériques des élèves va initialiser ces dynamiques et conduire ou non à un déficit en termes d'apprentissage.

Retour au sommaire

Première dynamique : l'élève possède au départ suffisamment de connaissances sur les décompositions des nombres ; il va pouvoir les convoquer pour mobiliser des procédures plus économiques car plus adaptées. Il est ainsi amené à davantage explorer lors des calculs, les propriétés des nombres et les opérations. Cette exploration contribue à enrichir ses connaissances numériques, à les rendre plus disponibles et donc à accroître les possibilités d'explorer de nouvelles procédures, de les mobiliser à bon escient. Cette première dynamique est **productrice d'apprentissages.**
Seconde dynamique : en revanche, si les connaissances de l'élève sont plus limitées, il va se réfugier dans des procédures apparemment plus sûres mais beaucoup plus coûteuses et conduisant souvent à l'échec. Ce dernier réduit le nombre et la richesse des expériences numériques susceptibles d'être faites lors des activités de calcul mental et peut donc contribuer à limiter le développement des connaissances. Un déficit cognitif se creuse entre cet élève et le précédent.
Un défaut de prérequis peut donc limiter de manière importante les effets bénéfiques d'une pratique quotidienne de calcul mental. Pour être producteur de connaissances, un enseignement de calcul mental doit permettre à des procédures non standards de vivre.
Les algorithmes écrits, notamment, ne doivent pas écraser les autres procédures. Cet enseignement doit aussi avoir pour objectif de développer suffisamment de connaissances afin d'initialiser la première dynamique que nous venons de décrire et de pallier les manques éventuels. Tous les élèves sont ici concernés, mais ces manques sont particulièrement criants pour les élèves en difficulté. Ils concernent par exemple la connaissance et la disponibilité des compléments à dix, à la dizaine ou à la centaine supérieure et les décompositions multiplicatives (voir ci–dessous).
Si une familiarisation trop faible avec les propriétés spécifiques de ces nombres peut expliquer la prégnance de procédures peu adaptées, elle s'explique aussi par l'absence de procédures automatisées de traitement associées. En effet, l'élève ne pourra mobiliser rapidement la décomposition 17 = 20 – 3 (ou 17 = 5 + 12) dans le calcul 45 + 17 que si celles–ci sont disponibles. Ce qui nécessite un entraînement spécifique. L'élève doit non seulement avoir appris à décomposer ces nombres mais ces décompositions doivent avoir été automatisées.
La connaissance et la maîtrise d'un nombre insuffisant de procédures automatisées peuvent donc conduire l'élève à adopter, en calcul, un comportement automatisé. Pour dépasser ce comportement, il est nécessaire d'enrichir le panel des procédures automatisées.
L'enseignement du calcul mental est donc paradoxal : trop peu d'automatismes (au sens de trop peu de procédures automatisées) peuvent renforcer l'automatisme (au sens du comportement automatisé) ; davantage d'automatismes peuvent permettre d'échapper à l'automatisme.
La seconde partie de ce texte présente des activités qui peuvent permettre de dépasser ce paradoxe en apportant des éléments de réponse à la question : que faut–il mémoriser et quand ? Un premier élément consiste dans la mise en place progressive de procédures élémentaires automatisées de calcul. Il s'agit d'accroître les performances des élèves en enrichissant leurs connaissances numériques, en installant de nouveaux faits numériques avec une pratique régulière du calcul mental. Cela devrait les amener à restituer des faits mémorisés sans avoir à les reconstruire à chaque fois.
Ces procédures élémentaires de calcul jouent ensuite le rôle de modules de calcul intégrés dans des procédures plus riches et adaptées à d'autres nombres.

Retour au sommaire

Mais certaines conditions doivent être remplies pour que cette dynamique soit possible. Les élèves doivent savoir détecter les moments où il faut inventer et ceux où il faut reproduire, ce qui nécessite, de la part du professeur, des institutionnalisations[1] souples.
Ce dernier doit non seulement faire expliciter les procédures mobilisées mais aussi les hiérarchiser[2] et, pour certaines, institutionnaliser aussi leur domaine de validité. Une pratique régulière de calcul mental doit ainsi avoir pour objectif d'amener l'élève, non seulement à mettre en œuvre des procédures économiques, mais aussi à en percevoir le domaine d'efficacité. L'institutionnalisation souple porte à la fois sur l'économie de la procédure et sur son domaine d'efficacité. Elle ne doit pas être trop rapide ni trop forte car cela risquerait de se faire au détriment de l'adaptabilité. Elle ne doit pas être trop faible et ni trop tardive car alors toutes les procédures pourraient apparaître comme équivalentes et de ce fait, l'élève en difficulté aurait alors à choisir seul et à décoder la plus efficace ce qui pourrait l'amener à privilégier finalement les algorithmes usuels (poids social). Elle doit amener les élèves à prendre conscience de l'éventail et de la hiérarchie des procédures mises en œuvre dans la classe.

Rapports entre maîtrise de techniques opératoires et résolution de problèmes standards

Des recherches ont montré (Butlen, Pézard 2002) qu'une pratique régulière de calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves, se traduit, pour un certain type de problèmes standards, par une accélération du processus de reconnaissance de l'opération en jeu. Il s'agit de problèmes relevant de modèles relativement familiers aux élèves mais dont la reconnaissance n'est pas encore automatisée. Ce sont, par exemple des problèmes additifs faisant intervenir des compositions de transformations du type « le jeu de l'autobus » : Dans un autobus, il y a 28 voyageurs. À la prochaine station, 15 voyageurs montent et 17 descendent. Combien y a–t–il de voyageurs dans l'autobus quand il repart ? Ou des problèmes multiplicatifs simples : Pour réaliser un pull, Sylvie achète 18 pelotes de laine à 5 € la pelote. Calcule le montant de la dépense.

1. Le processus d'institutionnalisation a pour but de donner aux connaissances éventuellement mobilisées par les élèves un statut de savoir culturel et social. G. Brousseau précise que l'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action, que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. R. Douady et M.J. Perrin situent le processus d'institutionnalisation par rapport aux aspects outil et objet d'un concept. Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le «cours». Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut aux concepts qui, jusque–là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer.

2. Dans l'exemple ci–dessus (45 + 17), l'ordre dans lequel les procédures sont exposées correspond à une hiérarchisation locale selon le critère qui serait celui du « coût » en mémoire ou en calcul. L'adjectif « souple » qualifie le fait que ce qui est valable ici pour 45 + 17 ne le sera pas pour 45 + 15.

Retour au sommaire

Ce résultat a été établi à partir de la comparaison des performances et procédures d'élèves de CM2 entraînés régulièrement au calcul mental et celles d'élèves de classes équivalentes mais n'ayant pas suivi un enseignement aussi important dans ce domaine. Les élèves devaient résoudre un ensemble de 24 problèmes par écrit, mais aussi mentalement (4 problèmes à chaque fois). Ces problèmes s'inscrivent dans les apprentissages prévus en dernière année d'école élémentaire et portent sur des notions introduites auparavant. Ce sont des problèmes standards. Chaque problème fait intervenir une des quatre opérations arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication, division). Le nombre des données numériques varie peu (2 ou 3 données). L'énoncé peut comporter ou non une donnée inutile[3]. Il s'avère important de hiérarchiser les énoncés selon le degré de familiarisation pour que se révèle un certain impact d'une pratique régulière du calcul mental.
La comparaison montre qu'un entraînement au calcul mental, en allégeant les tâches de calcul, favorise une prise de sens lors de la résolution de problèmes et contribue à accélérer l'automatisation de la reconnaissance du modèle (opération(s) en jeu).
Les automatismes de calcul installés au cours d'une pratique régulière de calcul mental permettent aux élèves de construire des schémas de problèmes (Julo, 1995). Tout se passe comme si l'élève avait construit une mémoire des problèmes déjà rencontrés ainsi que des procédures de résolution associées. Cette mémoire s'organise grâce à une certaine catégorisation et à un recours à des problèmes prototypiques représentatifs de chaque catégorie. L'élève s'avère alors capable de mobiliser à bon escient le modèle le plus adapté pour résoudre le problème.
Les résultats de recherche exposés ci–dessus montrent que maîtrise de techniques de calcul d'une part, propriétés des nombres et des opérations et sens des opérations d'autre part se construisent dialectiquement. La technique n'est pas première par rapport au sens et inversement le sens ne peut pas se construire sans technique.
Ils montrent aussi l'importance d'une programmation d'activités permettant aux élèves de construire progressivement les connaissances nécessaires et qui ménage des étapes bénéfiques pour les apprentissages notamment ceux des élèves en difficulté en mathématiques.
À cet égard, deux types d'exemples sont développés ci–dessous pour préciser ces aspects :
– des exemples d'activités de calcul mental dites « préparatoires », car ayant pour but d'amener le plus grand nombre d'élèves à développer des capacités d'adaptation (adaptation aux calculs mais aussi aux problèmes qui leur sont posés) ;
– un ensemble de situations incontournables qui permettent de structurer une programmation pour l'apprentissage de la numération des entiers naturels quel que soit le niveau d'enseignement considéré.

Quelques pistes en calcul mental et en numération : des passages incontournables

Calcul mental

Forme, contenu et fréquence des activités de calcul mental

En début de cycle 2, avant de proposer des activités qui relèvent explicitement du calcul, et pour s'y préparer, les élèves seront entraînés à des activités de « pure »

3. Nous avons, à cette occasion, défini deux degrés de complexité des problèmes (voir revue *Grand N*, n° 79, Grenoble, 2007.)

Retour au sommaire

mémorisation de nombres présentés sous différentes formes (nombres dits, l'élève les répète ; nombres écrits en chiffres montrés quelques secondes, l'élève les écrit en chiffres) puis à des activités au cours desquelles il s'agira de mémoriser et de « traiter » les données, par exemple en restituant les nombres sous une désignation différente de celle qui aura été utilisée pour les présenter (nombres dits, l'élève les écrit en chiffres ; constellations montrées, l'élève dit les nombres) ou en restituant les nombres dans un ordre imposé (nombres dits, l'élève les écrit en chiffres du plus petit au plus grand) ou en leur faisant subir une transformation (nombres dits, l'élève écrit en chiffres les suivants de chacun de ces nombres) ce qui aboutira progressivement à des activités de calcul.
Les activités de calcul mental se présentent sous deux formes différentes selon l'objectif visé prioritairement.
Chaque jour, pendant 10 à 15 minutes, il est demandé aux élèves d'effectuer mentalement des calculs donnés oralement ou écrits au tableau puis cachés. Ceux–ci disent le mot–nombre ou écrivent le résultat du calcul de l'opération en chiffres ou en mots sur leur ardoise. L'enseignant valide les calculs et corrige si besoin rapidement les erreurs. Le but prioritaire est d'entraîner les élèves au calcul, de les confronter avec des exemples variés et d'accroître leurs performances (rapidité, mémorisation, maîtrise de techniques).
Une fois par semaine, une séance un peu plus longue (de l'ordre d'une trentaine de minutes) est consacrée à l'explicitation et à la comparaison des différentes procédures mobilisées par les élèves (y compris les procédures erronées quand elles révèlent une difficulté significative). Cette comparaison débouche sur une hiérarchisation des connaissances des élèves et des données intervenant dans les calculs. Le professeur s'attache alors à mettre en regard l'économie de certaines procédures et les propriétés des nombres en jeu. Il s'agit de capitaliser l'exploration effectuée dans les activités précédentes. Le nombre des calculs alors demandés aux élèves est nettement moins important que dans les activités précédentes. Si besoin, le professeur peut introduire ou rappeler certaines procédures jugées efficaces qui n'auraient pas été énoncées par les élèves.
À titre d'exemples, voici, plus précisément, quelques types d'activités portant sur l'addition et la soustraction. Des activités du même type sont à proposer pour la multiplication et la division.

Types d'activités : additions et soustractions

Il s'agit de trois séries d'activités[4] de calcul mental. Une première série d'activités, plus traditionnelles, revient à explorer, mémoriser et tester les tables d'additions. Une deuxième série d'activités porte sur la recherche de compléments à dix, cent, mille, etc. Une troisième concerne davantage les additions et soustractions mentales.

• Les tables d'addition

Les résultats des tables d'addition deviendront progressivement des faits numériques automatisés[5]. Certains s'acquièrent plus vite que d'autres ($n + 1$, $n + n$) ; certaines désignations (par exemple, les constellations ou les doigts dans le cas

4. Nous présentons ici uniquement les calculs élémentaires à automatiser et les faits numériques à mémoriser. Pour les aborder, le professeur aura recours à différents types de matériels et différents modes de gestion.
5. Le temps de réponse peut être un indice pour repérer un fait numérique automatisé ; toutefois, pour l'addition notamment, il n'est pas toujours évident de distinguer si un élève a mémorisé un résultat ou s'il le reconstruit très vite.

Retour au sommaire

de 5 + n avec n compris entre 1 et 5) peuvent aider à en « voir » quelques–uns. Mais ce n'est pas toujours la taille des nombres qui rend le calcul plus difficile (ainsi 5 + 5 est plus vite mémorisé que 4 + 3).

Deux types d'activités permettent d'explorer particulièrement et de mémoriser les faits numériques relevant des tables d'addition.

Le premier type est constitué de jeux de calcul mental utilisant différents supports : jeux de cartes (bataille, mariages, recto verso…), jeux de dominos, lotos, labyrinthes, etc. (différents ouvrages détaillent ces jeux).

Un second type d'activités a aussi pour objectif la mémorisation des tables, il convient de distinguer :

– la recherche de la somme ou de la différence : 8 + 7 = ? 9 – 3 = ?

– la recherche de l'un des termes de la somme ou de la différence : 9 + ? = 14 7 –> 14 8 – ? = 5 ? – 7 = 4

– la recherche des deux termes de la somme ou de la différence : ? + ? = 18 ? – ? = 6

• Recherche de compléments

Dans ces exemples, le jeu sur les données numériques et la nature du questionnement associé sont spécifiés.

Compléter à 10 :

Servant de base à de nombreuses procédures de calcul réfléchi, les cinq paires de nombres non nuls dont la somme est 10 sont à connaître suffisamment tôt. Les différentes représentations des nombres (constellations, doigts des mains, etc.) contribuent à leur mémorisation.

Afin de rendre disponibles différentes décompositions d'un nombre, dans cette activité mais aussi dans beaucoup d'autres, le professeur pourra jouer sur la formulation de la consigne. En effet, chaque consigne privilégie un point de vue (compléter une collection, se déplacer sur la droite numérique, égaliser deux collections, etc.). Ces changements de point de vue participent de la construction du nombre et contribuent à accroître la disponibilité des faits numériques.

Complète 3 pour faire 10.
Combien manque–t–il à 3 pour faire 10 ?
Que faut–il ajouter à 3 pour faire 10 ?
3 pour aller à 10 ?
3 –> 10 ?
3 + ? = 10
10 – 3 = ? Etc.

Ces variations de consigne concernent aussi les activités suivantes qui constituent à la fois un moment de réinvestissement et de développement des connaissances construites et automatisées lors de la recherche des compléments à 10.

Compléter à la dizaine supérieure :

14 –> 20 32 –> 40 53 –> 60

Compléter à 100 ou à la centaine supérieure :

30 –> 100 54 –> 100 327 –> 400 1350 –> 1400

Trouver le complément quand il s'agit de 10 ou d'un multiple de 10, voire de 100 :

32 –> 42 48 –> 78 25 –> 325 1235 –> 1635

• Autres activités

Ici, il s'agit de procédures automatisées liées le plus souvent à la spécificité de notre système de numération dont l'usage rend certains calculs plus faciles que d'autres.

Retour au sommaire

Ajouter 10 ou un nombre entier de dizaines à un nombre de deux ou trois chiffres :
55 + 10 257 + 10 497 + 10
60 + 30 38 + 60 40 + 122 265 + 40
Soustraire 10 ou un nombre entier de dizaines à un nombre de deux ou trois chiffres :
64 – 10 55 – 30 238 – 40
Ajouter ou soustraire 100 ou un nombre entier de centaines à un nombre de trois ou quatre chiffres :
325 + 100 1234 + 500 325 – 100 1234 – 200
4500 – 600 1370 – 500
Trouver le plus rapidement possible le résultat d'une addition en ligne :
27 + 4 + 15 + 3 + 5
Décomposer additivement un nombre en un nombre entier de centaines, dizaines et unités (décomposition canonique) :
34 = 30 + 4 327 = 300 + 20 + 7 1004 = 1000 + 4
Exprimer un nombre en faisant intervenir la dizaine, la centaine supérieure, etc. :
47 = 50 – 3 47 = 100 – 53
Compléter des égalités du type :
37 + 18 = 47 + ? 54 + 27 = 74 + ?
– en utilisant la décomposition décimale du second terme ;
27 + 8 = 30 + ?54 + 27 = 60 + ? 54 + 27 = 80 + ?
128 + 15 = 130 + ? 128 +15 = 140 + ?
– en faisant apparaître dans le calcul un multiple de 10 ou 100.

Numération : des passages incontournables

Concernant les différentes notions mathématiques à aborder au cycle 2, il est important d'identifier les passages incontournables et les étapes qui font relativement consensus et qui seront ensuite prolongées, enrichies pour aborder les apprentissages ultérieurs. Pour illustrer cette idée, l'exemple des notions liées à la numération est particulièrement bien adapté car on peut identifier au moins cinq types de situations de référence (situations incontournables) que l'on peut catégoriser comme suit. Elles sont reprises aux différents niveaux de la scolarité en adaptant le domaine numérique.
Afin de préciser un point faible de l'enseignement actuel, les situations portant sur le lien entre numération écrite (chiffrée) et numération orale (les mots–nombres prononcés ou écrits) sont davantage détaillées. Ces situations seront traitées dans les différents niveaux de classe, sur des domaines numériques différents. Il n'y a pas un ordre absolu de traitement, chaque situation enrichit les connaissances précédemment construites.

Les situations d'échange pour travailler l'écriture chiffrée du nombre

Si cette situation participe de la construction du nombre, l'objectif porte davantage sur les écritures, les désignations des nombres que sur les calculs sur ces nombres.
Ces situations sont incontournables au cycle 2. Elles permettent d'explorer les règles d'échanges qui justifient le système de numération de position : un même chiffre selon sa position désigne des quantités différentes ou des quantités identiques mais correspondant à des ordres différents. Au cycle 2 ce sont en particulier les situations de type « jeu du banquier ». L'évolution se traduit au niveau de la

Retour au sommaire

règle d'échanges (un contre cinq, puis rapidement un contre dix). Elles préparent et s'enrichissent avec tout le travail sur la monnaie.

Les situations de groupements

Pour les CP, il s'agira de construire des stratégies pour dénombrer rapidement et de manière fiable des collections de 60 à 100 objets et au CE de plusieurs centaines voire milliers d'objets[6]. Ces situations amènent à constater que l'utilisation des paquets de dix (notons que le nombre dix relève ici d'une convention imposée par notre système de numération) puis des paquets de paquets va faciliter la détermination de l'écriture du cardinal qui pourra être d'abord traduit sous la forme d'une écriture additive. L'évolution du CP au CM2 se fait au niveau du passage de collections réelles à des collections représentées sous différentes formes[7].

Les situations amenant à repenser les groupements par rapport aux échanges

Il s'agit d'amener les élèves à lire dans l'écriture d'un nombre des informations liées aux échanges ou aux groupements qui ont été effectués. La situation de référence est par exemple le problème des timbres : les timbres sont vendus par carnets de dix timbres. Paul a besoin de 260 timbres. Combien doit–il acheter de carnets ? Paul a besoin de 260 timbres. Combien doit–il acheter de carnets ? Corinne a besoin de 500 timbres. Combien doit–elle acheter de carnets ?
On constate un déficit en CE2 et en sixième. Par exemple, à la question : dans 238, combien de paquets de dix ?, 50 % réussissent à répondre en CE2 mais peu lisent directement la réponse « sur le nombre ». En sixième, on observe 80 % de réussite et seulement un élève sur deux mobilise des connaissances sur la numération.

Les situations abordant le point de vue algorithmique (dans les deux systèmes de numération)

Toutes les activités autour des compteurs (avec des chiffres ou avec des mots) et des calculatrices entrent dans cette catégorie en liaison avec l'utilisation des abaques. Il s'agit d'un travail autour des familles de nombres comme dans la situation du « jeu du château » en CP / CE1 (cf. ERMEL[8]), ou autour de la spirale des nombres. La structuration des nombres est également en jeu dans les situations utilisant la droite numérique.

Les situations d'exploration des règles de la numération orale et de mise en relation avec la numération de position (chiffrée)

Il s'agit de travailler avec les élèves sur ce qui distingue les deux systèmes de numération.
Certaines activités sont indispensables à des apprentissages futurs. Elles mettent en jeu des connaissances qui ne sont pas toujours reconnues comme des savoirs à enseigner par l'institution scolaire. Briand a montré[9] que c'était le cas pour l'énu-

6. Il est important de proposer des collections suffisamment importantes pour amener les élèves à abandonner des procédures de comptage de 1 à n et légitimer les procédures de groupements par dix.
7. Par exemple dans ERMEL les situations « les fourmillions » (CP), « les cahiers » (CE1), « les craies » (CE2), « les trombones » (CM1) et « les tickets de cantine » (CM2) entrent dans cette catégorie.
8. ERMEL, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes : GS, CP, CE1*, Paris, INRP/Hatier, 2001.
9. Cf. Briand, 1994.

Retour au sommaire

mération. Les élèves en difficulté issus de milieux socialement défavorisés ne peuvent bénéficier d'un environnement familial et culturel prenant en charge ces apprentissages en lieu et place de l'école.
Cela nous semble être le cas de l'apprentissage de la numération écrite avec des mots – appelée par certains « numération orale » – et du passage de la numération de position chiffrée à la numération orale.
Ces deux systèmes fonctionnent différemment[10]. Les règles d'écriture et de lecture ne sont pas les mêmes. L'enfant de CP doit apprendre en même temps les deux systèmes et acquérir des automatismes. Il doit penser « 80 » et donc voir les chiffres « 8 »et « 0 » en entendant quatre–vingt.
L'activité scolaire la plus fréquente abordant cette question est la dictée de nombres. L'élève doit alors apprendre et explorer, en même temps qu'il doit les restituer, les règles qui permettent de traduire dans l'un des systèmes l'écriture d'un nombre écrit dans l'autre système. Non seulement l'apprentissage de la numération orale n'est pas assez systématisé, mais il semble même relever, pour une large part, d'apprentissages effectués dans un cadre extrascolaire. Voici d'autres exemples de situations scolaires permettant ces apprentissages.

- Construire un dictionnaire de nombres

Il s'agit dès le CP de construire un livret dédié à l'écriture des nombres. Chaque page est consacrée à un nombre. L'élève y inscrit différentes écritures ou représentations de ce nombre. Les pages vont s'enrichir progressivement. À partir du CE1, les élèves construisent un dictionnaire collectif des nombres dont certaines pages sont affichées sur les murs de la classe. Le professeur se contente d'étudier certains nombres particuliers comme : cent, cent un, cent dix, cent vingt, deux cents, trois cents, mille, mille un, mille cent, un million, etc.

- Comparer deux compteurs

L'activité permet de repérer si un élève maîtrise davantage la numération chiffrée de position ou la numération orale. L'élève dispose de deux jeux de cartes. Le premier comporte des cartes sur lesquelles sont inscrits les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 servant à écrire les nombres dans le système de numération chiffrée de position. Le second est le jeu de cartes avec les mots–nombres.

La consigne est la suivante : utilise les deux jeux de cartes. Écris la suite des nombres que tu connais en commençant par zéro. À gauche, tu écris avec des chiffres ; à droite, tu écris avec des mots.

10. Le système de numération de position chiffrée en base dix, utilise les dix chiffres : 0, 1, ..., 8, 9. Il suffit d'écrire dans le bon ordre les chiffres 2, 4, 6 et 9 pour désigner le nombre 2469. La position du chiffre indique l'exposant de la puissance de dix correspondant :
$2469 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
Les opérations implicites sont des multiplications et des additions. L'ordre est évidemment indispensable à l'écriture et à la lecture des nombres dans ce système (d'où son nom). Ce système permet d'écrire sans ambiguïté tous les nombres entiers avec 10 chiffres seulement. Le système de numération orale (ou encore écrite avec des mots) est un système polynomial. Dans ce système, nous écrivons le nombre 2469 : deux mille quatre cent soixante–neuf. Les mots ne désignent pas les mêmes objets, certains désignant des coefficients multiplicatifs de la puissance de la base, d'autres désignant les puissances de la base correspondante et d'autres encore désignant une concaténation des deux. Les opérations implicites sont aussi des multiplications et des additions. Localement nécessaire, l'ordre correspond davantage à une nécessité sociale qu'à une nécessité mathématique. Contrairement au système précédent, il n'est pas possible d'écrire tous les nombres entiers car il faut une infinité de mots pour désigner la suite infinie des puissances successives de 10. Il faut alors inventer une nouvelle règle permettant de générer ces mots.

Retour au sommaire

Il est ainsi possible de repérer les difficultés de l'élève et de savoir s'il maîtrise davantage un système plutôt que l'autre.
Les erreurs comme les hésitations deviennent fréquentes à partir de soixante–dix. Cet exercice est à la fois un test et une activité d'apprentissage, on observe en effet que des élèves momentanément bloqués dans un système, recouraient à l'écriture du nombre dans l'autre système pour retrouver (voire reconstruire) l'écriture faisant défaut.

0	Zéro
1	Un
2	Deux
3	Trois
....	....
69	Soixante–neuf
70	Soixante–dix
71	Soixante–et–onze
72	Soixante–douze

• Simuler un « compteur manuel » permettant d'écrire les nombres avec des mots

L'activité[11] est proche de la précédente. Un nombre n est écrit avec des mots (cartes), par exemple :
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire avec des mots le prédécesseur n–1 de ce nombre ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le successeur n+1 de ce nombre ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre n+10 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre n+100 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre n+1000 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre n+10n ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre nx10 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre nx100 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre nx1000 ?
Quelle(s) carte(s) faut–il changer pour écrire le nombre nx10n ?

Deux	mille	trois	cent	vingt	quatre

Le professeur fait repérer les régularités et les ruptures dans les écritures ainsi générées. En particulier, il attire l'attention de l'élève sur les variations de la longueur de ces écritures ; il fait repérer des règles locales.
La simulation d'un compteur permet aussi d'étudier les variations des écritures quand on ajoute une unité au nombre de départ, et ce plusieurs fois de suite.

11. Cette activité a été conduite à tous les niveaux de l'école primaire ; les nombres et les opérations proposées correspondent au domaine numérique fréquenté.

Retour au sommaire

• Combien de chiffres ? Combien de mots ?

Un nombre étant énoncé par le professeur, l'élève écrit sur son ardoise le nombre de chiffres nécessaires pour l'écrire. Inversement, un nombre étant écrit au tableau avec des chiffres, l'élève doit écrire sur son ardoise le nombre de mots nécessaires. L'institutionnalisation porte sur la longueur de l'écriture d'un nombre qui ne dépend pas systématiquement de sa grandeur : le nombre « deux cent vingt trois » comporte plus de mots que le nombre « un million ».

• Écrire avec des chiffres ce que l'on entend

Le professeur énonce un nombre, par exemple : deux mille trois cent vingt–sept. L'élève écrit avec des chiffres les nombres entendus et puis retrouve l'écriture chiffrée canonique à l'aide d'un arbre de calcul.

Bibliographie

- **BOULE F.,** *Performances et démarches de calcul mental au cycle III. Éléments pour une pédagogie du calcul mental*, Thèse de doctorat, Villeneuve d'Ascq, Presses universitaires du Septentrion, 1997.
- **BUTLEN D., PEZARD M.,** *Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique*, revue *Grand N*, n° 79, Grenoble, 2007.
- **BUTLEN D.,** *Calcul mental, entre sens et techniques, des difficultés des élèves aux élèves en difficulté*, Besançon, Presses Universitaires de Franche Comté, 2004.
- **BUTLEN D., PEZARD M.,** *Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège*, Spirale, Revue de Recherches en Éducation, vol. 31, Lille, 2003, p. 117–140.
- **BUTLEN D., PEZARD M.,** *Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12.2.3, 319–368, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1992.
- **FAYOL M.,** *Nombre, numération et dénombrement. Que sait–on de leur acquisition ?*, Revue Française de Pédagogie n° 70, Paris, INRP, 1985, p. 59–77.
- **FAYOL M., MONTEIL J.–M.,** *Stratégies d'apprentissages/apprentissages de stratégies*, Revue Française de Pédagogie, n° 106, Paris, INRP, 1994, p. 91–110.
- **FISCHER J.–P.,** *L'automatisation des calculs élémentaires à l'école*, Revue Française de Pédagogie n° 80, Paris, INRP, 1987, p. 17–24.
- **JULO J.,** *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes, 1995.
- **VERGNAUD G.,** *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang, 1981.
- **VERGNAUD G., DURAND C.,** *Structures additives et complexité psychogénétique.* Revue Française de Pédagogie, 36, 1976, pp. 28–43.

Retour au sommaire

Partie 2 Apprendre le nombre

Premières compétences pour accéder au dénombrement

Fabienne Emprin et Fabien Emprin

Qu'est–ce que savoir compter ?

Dans le langage courant, l'action de compter correspond à réciter ce que l'on nomme la comptine numérique : un, deux, trois ..., c'est énoncer la suite des mots–nombres. Cette activité de récitation n'est qu'une partie de ce que l'élève doit être capable de faire pour dénombrer des quantités en comptant : le comptage–dénombrement. Dans cette partie, nous explicitons les quatre capacités décrites dans les programmes de 2008 qui concernent les apprentissages numériques à l'école maternelle.

Dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus

Dénombrer signifie littéralement « extraire le nombre de ». Une des méthodes pour dénombrer est le comptage, c'est–à–dire l'utilisation de la chaîne orale de un en un (« un ; deux ; trois ; ... ») pour déterminer le cardinal d'une collection (un ensemble d'objets). Pour arriver à dénombrer ainsi, la connaissance de la comptine numérique ne suffit pas. Le dénombrement fait appel à plusieurs concepts et compétences qui doivent être acquis par l'élève. Une observation fine de l'activité de l'élève, à qui cette tâche est proposée, permet à l'enseignant d'identifier les points de blocage et de mettre en place des situations pour travailler ces compétences ou remédier aux difficultés des élèves.
Le concept de **collection** correspond à un ensemble d'objets unis par une propriété commune. Par exemple, pour dénombrer les élèves, je ne compte pas la maîtresse car elle ne fait pas partie de la collection. Ce concept est en particulier mis en place par les activités de tri.
Le concept de **désignation** revient à remplacer un objet par un symbole. En effet dénombrer, c'est attribuer à une collection un symbole qui permet de conserver la mémoire de son cardinal : le nombre.

Au–delà de l'acquisition de ces concepts, des compétences sont également nécessaires pour mener à bien le dénombrement par comptage.
L'élève doit pointer une et une seule fois tous les éléments de la collection. Cette compétence, nommée « **énumération** », peut être travaillée indépendamment de celle de la récitation de la comptine. Il s'agit de développer des procédures pour être sûr de ne pas oublier d'objet et ne pas pointer deux fois le même. Les procédures d'énumération sont dépendantes de la nature de la collection, de son organisation spatiale, du fait que les objets soient déplaçables ou non. On peut marquer les objets d'un trait de crayon (procédure de pointage), les déplacer pour distinguer ceux qui sont déjà pris en compte et ceux restant (procédure de séparation), mettre

Retour au sommaire

les objets en ligne, faire un chemin mental ou matérialisé (parcourir la collection en reliant ses éléments…). Pour beaucoup d'élèves, ces procédures s'apprennent en faisant, c'est–à–dire en dénombrant mais ce n'est pas le cas pour tous et il paraît important de concevoir des situations pour assurer et maîtriser un réel apprentissage. L'élève doit **connaître la chaîne orale**, c'est–à–dire la suite des mots–nombres. Nous revenons en détail sur cet apprentissage dans le second paragraphe.

L'élève doit également **synchroniser le pointage** des éléments de la collection avec la récitation des mots–nombres.

Il doit également faire **abstraction de certaines propriétés** des objets de la collection, c'est–à–dire compter une grosse bille comme une petite, une bille bleue comme une rouge…

L'élève doit comprendre que le **dernier mot nombre prononcé correspond au cardinal** de la collection, c'est–à–dire au nombre d'objets présents. Il s'agit pour l'élève de faire le lien entre le fait d'attribuer un numéro à chaque objet (comptage–numérotage) et le cardinal de la collection. Pour ce faire, il est intéressant de développer cette compétence indépendamment du dénombrement par comptage, par exemple en utilisant le *subitizing*, qui est la capacité de percevoir globalement les petites quantités (inférieures à quatre) ou, suite à un apprentissage, des quantités organisées comme les constellations (les dés). En montrant très rapidement une quantité à un élève, on l'oblige à utiliser la perception globale puis pour la vérification, il peut compter.

L'élève doit se rendre compte que **l'ordre de pointage est indifférent** et qu'il conduit toujours à désigner la même quantité.

Les élèves doivent comprendre ce à **quoi servent les nombres**. La première fonction est de mémoriser les quantités. Il faut donc proposer aux élèves une situation pour laquelle **la mémorisation de la quantité** impose l'utilisation du nombre. L'élève possède une collection de tirelires par exemple, il doit aller chercher juste ce qu'il faut de jetons, pour qu'il n'y ait pas de tirelire sans jeton, ni de jeton sans tirelire c'est–à–dire un et un seul jeton par tirelire. Les jetons sont dans une autre salle et pour réaliser cette tâche, l'élève doit aller les chercher et n'effectuer qu'un seul trajet. L'élève aura probablement besoin d'être confronté un certain nombre de fois à la situation pour arriver finalement à la seule procédure adaptée : dénombrer les tirelires, mémoriser le nombre, prendre le nombre de jetons. Deux choses sont importantes pour que la situation fonctionne : dans la consigne, l'enseignant ne doit pas prononcer les mots « nombre » ou « compter », ce qui induirait des procédures et l'élève doit savoir réciter la comptine suffisamment loin pour pouvoir dénombrer les tirelires puis les jetons sans erreurs.

La deuxième fonction du nombre est de conserver la **mémoire du rang** d'un élément dans une collection organisée : le nombre sert à mémoriser la position d'un objet dans une file par exemple. Pour cela, il faut que les élèves soient capables, dans une collection organisée, de définir un sens de parcours, c'est–à–dire de donner **un ordre**. La suite orale ou écrite des nombres est ordonnée (les élèves doivent repérer les nombres qui sont avant et après, le suivant et le précédent d'un nombre).

La troisième fonction du nombre est **d'anticiper**, c'est–à–dire de donner le résultat d'une action sans avoir à la réaliser. Il est possible grâce au nombre de comparer des collections sans les rapprocher pour faire de la correspondance terme à terme, ou de connaître le résultat d'une augmentation ou d'une diminution sans réellement ajouter ou supprimer des éléments de la collection.

Pour les élèves n'ayant pas acquis ces concepts, l'activité de comptage est parfois vide de sens et répond aux demandes de l'enseignant de type « compte » ou « combien… ».
Nous détaillons à présent les spécificités liées à l'apprentissage de la chaîne orale.

Retour au sommaire

Mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30

Les programmes précisent : l'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. L'apprentissage de la suite des nombres est donc intimement lié à l'activité de dénombrement tout en nécessitant un apprentissage spécifique. L'apprentissage de la chaîne orale (la suite des mots–nombres) est mis progressivement en lien avec d'autres représentations du nombre et en particulier la chaîne écrite (les désignations chiffrées des nombres).
Au début, pour l'élève, l'apprentissage de la chaîne orale ne diffère pas de celui d'une autre récitation. Les comptines numériques sont susceptibles d'aider les élèves à cette mémorisation. Selon les comptines choisies, on mémorise des blocs de mots : undeuxtrois, nous irons aux bois, quatrecinqsix, cueillir des cerises, septhuitneuf, dans mon panier neuf. L'identification des « mots–nombres » reste difficile au milieu des blocs. On verra par exemple un élève répondre « tuite » à la place de huit à la question : « Combien y a–t–il d'objets », car il n'a pas séparé correctement le bloc « sis » « set » « tuit ». Il convient donc d'aider les élèves à segmenter la chaîne orale en variant les comptines, celles présentant des blocs plus petits un deux, V'la les œufs, trois quatre, faut les battre..., ou encore isolant les nombres : « un nez, deux nez, [...], dix nez, miam ! »
Un maniement correct de la chaîne orale est également nécessaire dans de nombreuses activités liées aux nombres et aux premières manipulations sur les quantités :
– arrêter la récitation de la comptine numérique à un nombre convenu à l'avance est nécessaire pour constituer des quantités (donne–moi 9 billes) ;
– commencer la comptine numérique à n'importe quel nombre est utilisé lorsque l'élève doit surcompter. Lors du lancer de deux dés « 5 » et « 3 » par exemple, l'élève peut tout recompter ou partir de 5 pour dire « six, sept, huit » ;
– réciter la comptine à l'envers, à partir de n'importe quel nombre, avec ou sans appui sur la chaîne orale. Cela peut avoir deux fonctions. La première est d'aider à mémoriser la chaîne orale elle–même : en effet le fait de réciter à l'envers oblige à mémoriser des blocs ordonnés. C'est ce qu'un adulte fait en général pour réciter l'alphabet à l'envers en partant de « m » par exemple. La seconde est de permettre le décomptage : « je suis sur la case 8, je recule de 3, donc je dis « sept, six, cinq » ;
– réciter la comptine de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10 à partir de différents nombres, permettra la mémorisation des doubles (pour « de 2 en 2 »), l'utilisation de la numération (pour « de 10 et 10 ») et de certaines régularités comme outil de comptage ou de calcul.
Certaines comptines permettent également de faire un lien avec la quantité ou d'autres représentations des nombres comme les collections de doigts, comme par exemple : un petit lapin sur le chemin rencontre un autre petit lapin, deux petits lapins sur le chemin sont devenus copains. Deux petits lapins sur le chemin rencontrent un autre petit lapin...
Bien évidemment, l'écrit a également une grande importance dès l'école maternelle et l'introduction des écritures chiffrées des nombres en fait partie. C'est sur cet apprentissage et les premières régularités repérées par l'élève, que se construit la numération en base dix.

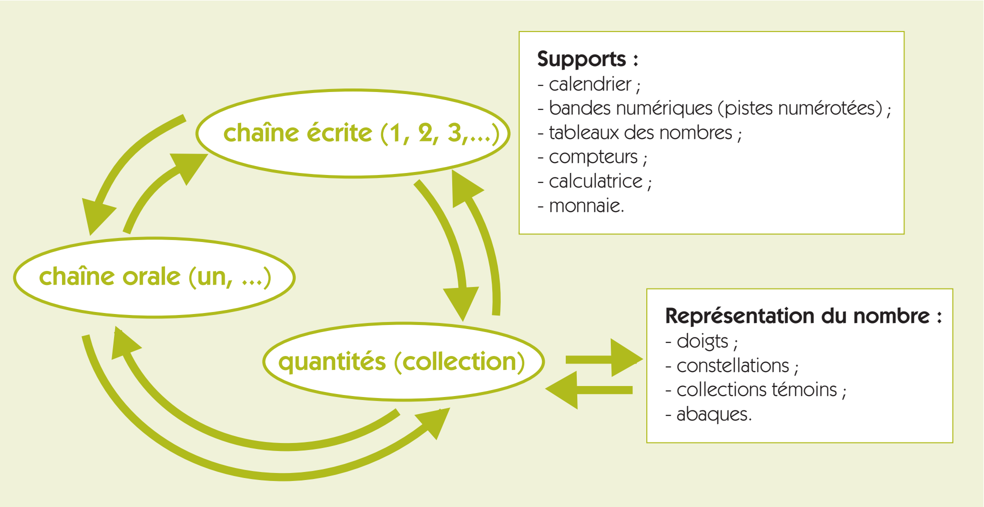
Associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée

Les écritures chiffrées sont reconnues, dans un premier temps, par les élèves, comme des symboles, même au–delà de « 9 ». Des supports permettent de fréquenter ces écritures : le calendrier, les bandes numériques, les compteurs, les tableaux

Retour au sommaire

de nombres, de même que les activités comme les lotos, les dominos numériques, les jeux de pistes et de dés… Ces différentes représentations ont des particularités qu'il faut exploiter pour les apprentissages.
Les différents calendriers sont d'abord un support social, ils permettent de faire un lien entre sens du nombre et structuration du temps.
Les bandes numériques (et donc également les pistes numérotées et les différents tableaux de nombres) permettent à l'élève de retrouver l'écriture chiffrée d'un nombre en dénombrant les cases. Par exemple, pour trouver l'écriture chiffrée de « onze », l'élève effectue un comptage–dénombrement des cases de la bande numérique et s'arrête quand il énonce « onze », c'est–à–dire sur la case où « 11 » est inscrit. De même, la bande numérique permet de faire le lien entre aspect ordinal (celui du comptage numérotage où l'on attribue un numéro d'ordre à chaque élément d'une collection) et aspect cardinal du nombre.
Les pistes, les compteurs (à roues ou à bandes, automatiques ou non), la calculatrice et les tableaux des nombres permettent à l'élève de se rendre compte de la façon dont les écritures chiffrées des nombres sont organisées, c'est une étape importante vers la construction de la numération.
Il existe d'autres désignations écrites des nombres comme les constellations des dés, les doigts de la main, les collections témoins (faire autant de traits qu'il y a d'objets par exemple). Ces différentes représentations, dans différents cadres, fournissent à l'élève des outils qui l'aident à construire le système de numération et à développer des procédures de calcul.
Chacune des flèches du schéma suivant peut être associée à un type d'activité. Il est important de proposer des situations amenant à travailler l'ensemble de ces relations. Les différentes formes de représentation des nombres constituent une variable dont le choix permet d'adapter les situations aux besoins des élèves et sont un levier important pour faire évoluer leurs procédures.

Schéma 1 : relations entre les différentes formes de représentations du nombre et les quantités



L'ensemble de ces compétences est à travailler dans différents contextes mais l'action sur des quantités réellement présentes et non sur des dessins de collections est primordiale.

Retour au sommaire

Comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités

L'utilisation du nombre pour résoudre des problèmes contribue à lui donner du sens : Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but (programmes).
Les élèves doivent se confronter à des situations variées pour construire des représentations des situations qui seront un point d'appui pour le calcul et la résolution de problèmes numériques en général. Ces situations consistent en des actions sur des quantités réelles, des transformations, des comparaisons... et peuvent donc être résolues dans un premier temps, en n'utilisant que des procédures non numériques (la correspondance terme à terme, la distribution un à un d'objets), des procédures de comptage (en recomptant la collection) ou des procédures basées sur des « faits numériques », c'est–à–dire des résultats mémorisés comme des doubles (5 et 5, c'est 10) ou des compléments (7 pour aller à 10, il faut 3).
Différents types de tâches permettent à l'élève de comprendre le pouvoir d'anticipation que confère le nombre et de développer des procédures :
– constitution d'une collection équipotente à une collection donnée ;
– comparaison de deux quantités présentes (proches ou éloignées l'une de l'autre) ou absentes.
Des situations qui relèvent du champ additif (addition / soustraction) :
– comparaison de 2 sous–collections à la collection totale ;
– déplacement sur la droite numérique en avant et en arrière, recherche de la case d'arrivée ou de départ/évolutions d'une collection par gain ou perte, recherche de compléments ;
Des situations relevant du champ multiplicatif (multiplication / division) :
– recherche du cardinal d'une collection double ou moitié d'une collection de référence ;
– partage de collections de façon équitable ou non, recherche de la valeur des parts, du nombre de parts…
La partie suivante développe des exemples de situations de référence, des situations pour travailler la mémorisation de la comptine numérique et une progression de situations autour de la mise en relation des différentes désignations du nombre.

Exemples de situations pour apprendre à compter

Utiliser la suite orale des nombres connus

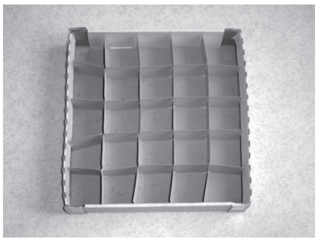
Compétence : dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus.

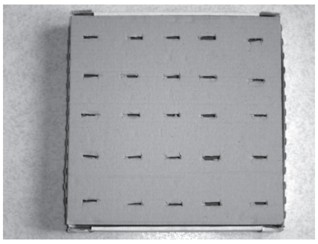
L'énumération

Savoir énumérer est nécessaire pour dénombrer. Cet apprentissage peut se faire par imitation, à force de dénombrer…, mais des situations spécifiques sont à introduire pour s'assurer des compétences des élèves et élargir leur usage.
Ainsi la capacité à énumérer une collection peut être travaillée tout au long de l'école maternelle et peut être reprise en CP si nécessaire car sa non–maîtrise peut être la cause de difficultés dans le comptage–dénombrement chez certains élèves. L'enseignant peut intervenir sur cette notion avec les élèves concernés dans le cadre de l'aide personnalisée et de la différenciation en classe.
L'élève doit être capable, dans différents contextes, de passer en revue une fois et une seule chacun des éléments d'une collection. Nous décrivons une situation type

Retour au sommaire

puis nous présentons les variables sur lesquelles l'enseignant peut jouer pour faire travailler les compétences attendues. Précisons qu'il n'est pas question de mettre en œuvre toutes les variantes possibles, mais bien de faire des choix en fonction des besoins des élèves.


boîte ouverte : les cases


boîte fermée : les fentes

Situation type : l'enseignant présente à l'élève une boîte avec des cases, puis il place un couvercle avec des fentes (voir photo ci–dessus). Chaque fente correspond une case, l'élève doit mettre un et un seul jeton dans chacune des cases. Il a plus de jetons que nécessaire, la tâche n'est pas une tâche de dénombrement, la collection peut être bien plus grande que les capacités de dénombrement de l'élève. Pour vérifier s'il a réussi sa tâche l'élève enlève le couvercle et constate qu'il y a bien un et un seul jeton dans chaque case.
Sur le principe de cette situation, il est possible de modifier les choix de la valeur de certaines variables qui favorisent certaines procédures.
Voici la liste des variables et les procédures favorisées :
– **L'organisation des cases** : en ligne, en lignes et en colonnes (plaques d'œufs), en cercle, sans organisation apparente. Les grilles rectangulaires (plaque d'œufs) favorisent le parcours de la collection ligne par ligne ou colonne par colonne. Pour les fentes en cercle, il est important de mémoriser le point de départ en mettant son doigt devant la fente par exemple. Les collections moins organisées incitent l'élève à faire un chemin qui relie les différentes cases.
– **Les cases sont fixes ou mobiles** : l'élève peut déplacer les cases (boites d'allumettes dans lesquelles on a pratiqué une fente) ou non (fentes dans une boîte à chaussures). Dans le premier cas, mettre de côté les boîtes déjà remplies, la procédure de séparation est alors favorisée.
– **La taille de l'espace** : l'élève voit tous les cases dans son champ de vision (fentes dans une boîte à chaussures) ou les cases sont disséminées dans un grand espace (tirelires disséminées et fixées au sol dans la salle d'EPS). Dans le cas d'un grand espace, l'élève peut beaucoup moins mémoriser visuellement les cases déjà remplies, l'idée de parcours, de chemin est favorisée.
– **Le jeton est visible ou invisible** : s'il est possible de voir le jeton dans la case (boîte ouverte), la tâche de l'élève est de distribuer un et un seul jeton. Si en revanche lorsqu'un jeton est mis, on ne le voit plus (fentes dans la boîte fermée), l'élève doit mettre en place une procédure qui lui garantisse de ne pas remettre de jeton dans cette case. La situation « boîte ouverte » peut être utilisée en première situation pour aider les élèves à s'approprier la tâche mais aussi, du côté de l'enseignant, pour vérifier que tous les élèves sont capables de distribuer les jetons à raison d'un par case et ce, pour repérer les procédures des élèves (font–ils déjà ligne par ligne ?...).
– **Le marquage est possible ou impossible** : est–il possible de faire une marque (trait de crayon ou objet déposé) sur les cases déjà remplies ? Si oui les procédures de marquages sont favorisées.

Retour au sommaire

Il est utile d'amener les élèves à formuler leurs procédures. Des mises en commun permettent de faire la liste des procédures qui ont permis de réussir la tâche, ces formulations sont alors gardées comme trace écrite sous forme de schémas ou d'écrit en fonction du niveau de classe des élèves.
Une autre solution pour amener les élèves à formuler leurs procédures consiste à mettre en place une situation de communication.
Le dispositif est une boîte dont le couvercle est fermé. Les élèves sont par groupes de quatre ; chaque élève possède quelques jetons (environ ¼ de la collection). Ils doivent mettre leurs jetons dans la boîte de façon à ce qu'il y ait un et un seul jeton par case. Le premier élève place ses jetons dans la boîte, couvercle fermé, sans que les autres ne puissent le voir, puis il donne la boîte, toujours fermée, au deuxième élève en lui indiquant où il a placé ses jetons pour qu'il puisse continuer, le deuxième élève place ses jetons puis passe au troisième, et le troisième au quatrième, toujours en indiquant la place des jetons.
Pour réussir les élèves doivent avoir des stratégies facilement communicables, (en ligne ou en colonne, les diagonales, les coins). Ils doivent aussi les expliciter suffisamment, par exemple un élève dira « j'en suis là » en montrant une fente sans indiquer s'il a fait en ligne, en colonne ou autre…
Pour les enseignants de cycle 1, il est possible de mettre en œuvre plusieurs variantes. Pour les enseignants de grande section, une ou deux situations peuvent être mises en place (boîte rectangulaire fermée et/ou boîtes d'allumettes) pour vérifier l'acquisition de procédures. En CP, il s'agit surtout de situations de remédiation.

Le nombre pour mémoriser la quantité

Amener l'élève à se rendre compte que le nombre sert à mémoriser la quantité nécessite de lui demander d'aller chercher à distance, et en un seul trajet, juste ce qu'il faut pour compléter une collection. La situation que nous avons décrite ci–dessus peut être adaptée pour fonctionner en classe entière. L'élève possède une forme à compléter avec des gommettes, il doit aller chercher « juste ce qu'il faut de gommettes » pour remplir la forme. La quantité de gommettes manquantes est adaptée aux capacités des élèves, il faut qu'ils sachent dénombrer la quantité manquante sans erreur. Les gommettes sont à une grande distance de l'élève. Dans un premier temps, l'élève peut effectuer plusieurs trajets, l'enseignant change la couleur des gommettes à chaque trajet, si l'élève en ramène trop, il les colle sur une feuille « poubelle ». Cette phase permet d'évaluer facilement les procédures des élèves, ceux qui en rapportent beaucoup, ceux qui ramènent les gommettes une par une, ceux qui en ramènent un peu puis évaluent la collection manquante et ceux qui réussissent en un seul voyage. Lors de la deuxième phase, les élèves n'ont plus qu'un seul trajet autorisé. Plusieurs reprises de cette phase sont nécessaires. Après plusieurs essais, les élèves mettent en commun leurs procédures, ils décrivent ce qu'ils ont voulu faire, comment ils s'y sont pris et si cela leur a permis de réussir la tâche. Lors de situations suivantes, les élèves peuvent faire des commandes de gommettes, oralement puis par écrit.

Le nombre pour mémoriser le rang

Là encore, nous décrivons une situation type qui permet de mettre en avant cette fonction du nombre puis, nous décrivons les variables sur lesquelles l'enseignant peut jouer pour faire évoluer les procédures des élèves.
Situation type : l'élève a un train avec des wagons sur lesquels sont inscrits des symboles. L'élève possède également un train vierge sur lequel il doit replacer les

Retour au sommaire

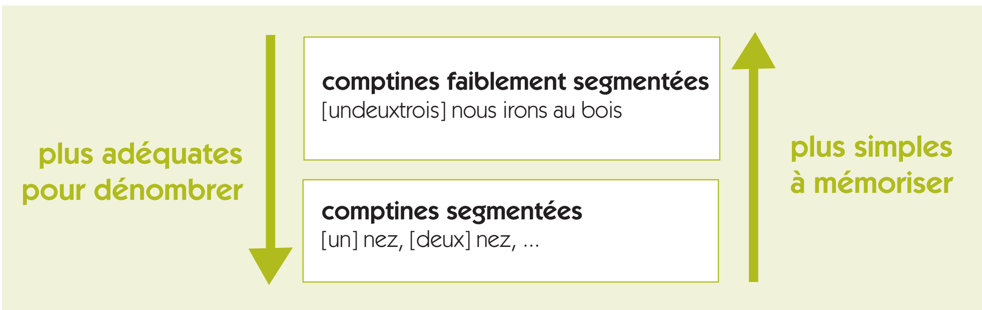
symboles dans le même ordre que sur le train modèle. Pour cela, il tire une carte avec un des symboles qu'il doit le placer au bon endroit.
– Le modèle est visible ou invisible : lorsque l'élève place le symbole sur le train vierge, a–t–il sous les yeux le train modèle ou bien ce train modèle est–il à un autre endroit ? Dans le premier cas, l'élève peut faire une correspondance visuelle, alors que dans le second, il devra mémoriser le rang de son wagon, c'est–à–dire utiliser le nombre. La première variante (modèle visible) est utile pour vérifier l'appropriation de la tâche par l'élève et pour repérer les procédures initiales des élèves.
– Le modèle est dans le bon ou le mauvais sens : dans le cas où l'orientation du train de référence n'est pas la même que le train modèle, l'élève doit identifier un sens de parcours.
Les symboles sont tirés au hasard ou l'élève peut choisir quel symbole il place. Dans le dernier cas, l'élève peut utiliser des procédures qui ne nécessitent pas la mémorisation de la position (commencer par le premier wagon après les locomotives, puis le suivant et ainsi de suite).
Il est également possible de demander aux élèves de passer par un message oral ou écrit pour communiquer à un autre élève ou pour se souvenir des positions des wagons.

Travailler et évaluer la mémorisation de la chaîne orale

Compétence : mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30.

Différents types de comptines à programmer dans le temps

L'apprentissage de la suite des mots–nombres s'opère en partie par l'intermédiaire des comptines numériques. La programmation de ces comptines dans le temps est guidée par l'apprentissage des mots–nombres.
Le schéma ci–dessous récapitule les problèmes de segmentation.



De nombreuses comptines existent et sont disponibles en particulier sur Internet ; c'est pourquoi nous ne proposons ici qu'une typologie des comptines :
– répétitives sans segmentation : j'ai fait une pirouette, [undeuxtroisquatrecinqsixsept], j'ai déchiré mes chaussettes [undeuxtroisquatrecinqsixsept] ;
– segmentation par 3 : [undeuxtrois] nous irons au bois ;
– segmentation par 2 : [undeux] voila les œufs ;
– segmentation par 1 : [un] nez, [deux] nez, [trois] nez ;
– cumulative : [un] elle a un œil brun [undeux], elle a des plumes bleues ;
– anti–cumulative : [undeuxtroisquatrecinqsixsept] j'ai des trous à mes chaussettes [undeuxtroisquatrecinqsix] j'ai mangé l'écrevisse ;

Retour au sommaire

– à l'envers : dans la forêt du dolmen vert, il y a [dix] ours qui marchent à l'envers, [neuf] petits daims plein de lumière [...] et [zéro] sorcière ;
– segmentation par dix : qui compte jusqu'à dix ? c'est Alice, qui compte jusqu'à vingt ? c'est Germain.

Des activités pour approfondir les compétences liées à la chaîne orale

Des activités de systématisation permettent au professeur de s'assurer que les élèves ont une connaissance approfondie de la suite des mots–nombres, connaissance qui permettra de développer les stratégies de calcul et le travail sur la numération. Ces activités sont usuelles mais il est important que les enseignants programment ces activités en connaissance de cause.
Parmi ces activités, on trouvera par exemple :
– **le maître ou la marionnette qui se trompe.** L'enseignant récite la suite des nombres en se trompant volontairement, les élèves doivent lever la main quand ils entendent des erreurs. Ces dernières peuvent être inspirées de celles des élèves. L'enseignant utilise une marionnette pour se tromper à sa place ce qui peut éviter des difficultés chez les élèves qui ne comprendraient pas bien qu'il s'agit d'un « jeu » et que l'enseignant « le fait exprès » ;
– **le jeu du tambour.** L'enseignant commence à réciter la comptine puis remplace les mots–nombres par des coups sur un tambour, avec éventuellement des changements de rythme. Lorsqu'il s'arrête les élèves doivent dire à quel nombre en est la comptine. Cette activité prépare la synchronisation de la récitation de la comptine avec le pointage d'une collection ;
– **le filet.** Une partie des élèves fait une ronde en récitant la comptine numérique jusqu'à un nombre déterminé en secret. Une autre partie des élèves, qui ne connaît pas le nombre secret, doit traverser la ronde à quatre pattes. Quand le nombre est atteint les élèves de la ronde se baissent et ceux qui sont au milieu sont capturés. Cette activité apprend à ceux qui font la ronde à s'arrêter à un nombre donné ;
– **le jeu de l'escalier ou de la piste.** Il consiste à réciter la comptine en montant et descendant un escalier sur lequel peuvent être écrits ou non les nombres. Ce jeu peut également se dérouler sur une piste sur laquelle les élèves se déplacent réellement ou encore une piste sur laquelle ils déplacent un pion. Il permet également de compter de deux en deux, de travailler le vocabulaire : « monter » / « descendre », « au–dessus » / « en–dessous » pour l'escalier « avancer » / « reculer » « avant » / « après » sur la piste, dans la chaîne orale et écrite.

Repérer les compétences des élèves

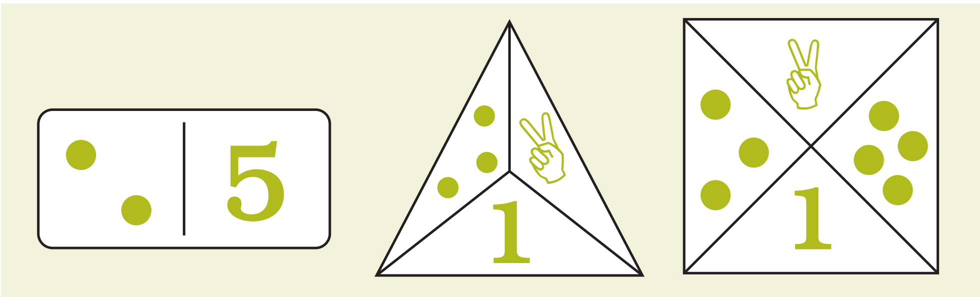
Pour faire un état des lieux de la mémorisation de la comptine numérique chez l'élève, plusieurs éléments définissant des étapes sont à repérer. Ces éléments peuvent être évalués par les cinq questions suivantes :
– **jusqu'où sais–tu compter ?** Cette question permet de savoir si l'élève sait qu'il sait ;
– **compte.** On notera à ce moment la fin de la partie exacte et on repèrera différents types d'erreurs comme les bouclages ([...28, 29, 20, 21...]), les répétitions (25, 26, 27, 26, 27), les repérages d'une certaine forme de régularité mais incorrecte (vingthuit, vingtneuf, vingtdix, vingtonze...). On notera également le plus grand nombre atteint ;
– **compte jusqu'à « n »**, « n » étant un nombre dans la zone où la comptine est stable ;
– **compte en commençant à « n »** ;
– **compte à l'envers en commençant à « n »**.

Une progression autour de situations de consolidation

Compétence : associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée.

Des activités possibles

Les représentations des nombres sont multiples : écriture chiffrée usuelle (que nous désignerons dans le tableau de synthèse par le mot « nombre »), mots–nombres prononcés ou écrits, désignation avec les doigts (doigts), constellations du dé ou des cartes à jouer (dé), collections témoins non organisées comme des bâtons (collection)… La dialectique, les ponts entre ces différentes représentations permettent à l'élève de construire du sens ; c'est pourquoi ce sont ces différentes représentations qui guideront cette progression.
Les nombres sont présents dans l'environnement familier de l'élève (téléphones, télécommandes, affichages numériques…), dans des jeux appartenant à la culture commune (petits chevaux, jeux de l'oie…) et dans les activités liées au fonctionnement de la classe (calendrier, rituels…). Il s'agit ici de présenter une sélection de quelques jeux particulièrement adaptés pour entraîner les élèves à associer les différentes désignations d'un même nombre. Les lotos, les mémory, les dominos, les flashcards permettent de contrôler la façon dont l'élève accède à la quantité en jouant sur le temps de visualisation.



dominos triangles carrés

Les lotos : un élève ou l'enseignant tire une carte sur laquelle est écrit un nombre dans une des représentations. Soit il la montre, soit il la lit. Les autres élèves possèdent une grille sur laquelle sont inscrits des nombres dans une des représentations. Quand un nombre est tiré et qu'il figure sur sa grille, l'élève le coche. Quand une ligne ou une grille est entièrement cochée, l'élève gagne.
Les dominos : sur des jetons rectangulaires coupés en deux (dominos), des triangles équilatéraux coupés en trois, ou des carrés coupés en quatre selon les diagonales figurent des représentations des nombres. Ces représentations peuvent être variées sur un même jeton. Il faut se débarrasser le premier de ses jetons en plaçant côte à côte des désignations d'un même nombre. Si un joueur ne peut pas jouer, il pioche.
Il est également possible de jouer seul, en particulier avec les dominos triangulaires et carrés en essayant de réaliser des formes prédéfinies.
Les mémory : les cartes sont associées par paires, identiques dans le jeu classique ; elles comportent le même nombre dans deux désignations différentes dans le jeu scolaire. Les cartes sont retournées sur la table ; un élève retourne deux cartes, si elles comportent des désignations d'un même nombre, il les gagne et rejoue ; dans le cas contraire, il les replace au même endroit et passe la main. Il y

Retour au sommaire