

# **L'apprentissage des nombres entiers (ou naturels)**

L'homme a pris conscience des nombres au cours d'une longue évolution, bien avant l'écriture. Ces nombres étaient ceux qu'il pouvaient ramener aux possibilités symboliques du corps (les nombres naturels ou entiers positifs). Avec la formation des langues naturelles, l'homme a pu nommer ces nombres au lieu de simplement les montrer. Quand l'écriture est apparue, il a pu les tracer (par analogie, tels qu'il les parlait, dans un code réservé aux nombres). Les premières graphies se situent dans les pays sumériens. Les besoins de sa technologie l'ont ensuite amené à inventer de nouvelles espèces de nombres (ex : fractionnaires) théorisés bien plus tard. Les philosophes grecs se sont intéressés aux propriétés de ces nombres et à leurs relations, jetant les premiers fondements de l'arithmétique. Hindous, arabes, européens élargiront ce champ de connaissances. L'homme a créé un immense domaine de réflexion et d'action dont le comptage sur les doigts était le point de départ.

Tout cela s'est ordonné, organisé, structuré autour du début du XX<sup>e</sup> siècle. Cette connaissance n'avait appartenu qu'à des initiés (prêtres, scribes, corporations, lettrés). Depuis la révolution, l'obligation d'instruction de tout citoyen s'est imposée avec par priorité la lecture, l'écriture, le calcul.

## **Le nombre**

## **La chaîne numérale**

## **La chaîne numérique**

## **La structuration de l'ensemble des naturels**

## Le nombre

### 1. Les quantités qui ne se comptent pas

La langue maternelle utilise des quantificateurs (ou quantifiants) pour marquer qu'un ensemble d'objets est désigné dans sa totalité ou comme une partie de totalité. Les termes grammaticaux sont appelés articles alors que ce sont des quantifiants non numériques. Nous pouvons distinguer 3 types de quantifiants marquant :

- **la totalité** (extensif) : *tous les, toutes les, les, le, la, l', ces, ce, cette*
  - dans un ensemble dénombrable c'est-à-dire que l'on peut compter même si on ne le fait pas (*les élèves, ...*)
  - dans un ensemble non dénombrable (*le pain, l'eau, la farine, ...*)
- **la partie large** (partitif large). Il s'agit bien d'une partie, mais la totalité n'est pas exclue : *des = de les, du = de le, de la*
  - dans un ensemble dénombrable (*l'avis des élèves, ...*)
  - dans un ensemble non dénombrable (*du pain, de l'eau, de la farine, ...*)
- **la partie stricte** (partitif strict) : *certain, quelques (quelques élèves ont eu la moyenne)*
- **le singulier** *un, le, la, l'*. Hors numération, le « un » peut être quantifiant, pronom, article. Il peut désigner l'unicité de la chose (quantificateur) ou de son extension (article)
  - j'ai mangé **un** croissant / **un** soldat français ne recule jamais
  - **L'**homme dormait sous le chêne / **L'**homme est mortel

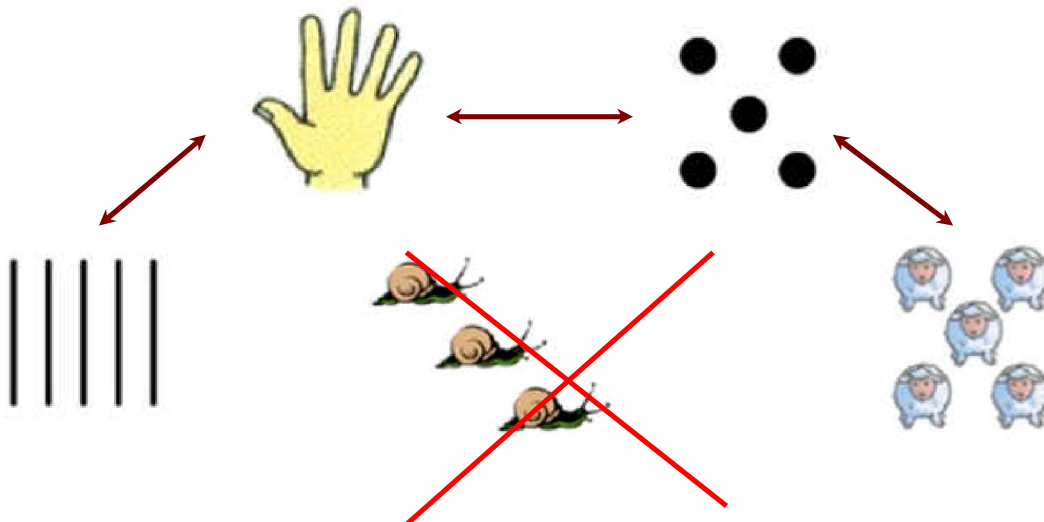
Dans la langue naturelle, le singulier est marqué par des quantifiants généralement « articles-adjectifs » : *le, la l', un, une, mon, ton, son, ma, ta, sa, notre, votre, leur, ce, cette, cet, ...*

- **le zéro, vide**. Zéro est rarement utilisé en article : zéro hommes ont marché sur Mars. *Aucun, nul, nulle, personne, rien, ...* Aujourd'hui, la publicité l'utilise plus : zéro pourcent de matière grasse, ...

### 2. Conceptualisation du nombre

✚ La procédure d'appariement (« correspondance terme à terme »)

Mise en relation d'un ensemble avec un autre telle que à un élément de l'un, on ne puisse faire correspondre qu'un et un seul élément de l'autre et réciproquement. Deux ensembles appariés sont dits équipotents (de même puissance ou de même nombre cardinal). L'équipotence est une relation transitive. Si A est équipotent à B, B équipotent à C, alors A est équipotent à C.



On peut appairier 4 de ces collections. La collection escargot ne peut être appariée aux autres. Le nombre définit alors l'opération ou la relation existant entre les collections appariées. Il échappe à la nature de l'objet constituant la collection. **Cinq**.

#### La relation d'ordre

Si j'établis une relation d'ordre « être le suivant immédiat de.. » que je peux réitérer indéfiniment, je construis alors une chaîne composée de tous les noms donnés aux nombres en commençant par un (1). C'est la chaîne numérique (ou numérale).

#### Le nombre

Un nombre devient alors une notion extraite d'une collection de mots ou de signes spécifiques, où chacun de ces mots ou signes désigne une propriété commune à tous les ensembles qui peuvent être appariés entre eux (sans tenir compte de la nature des éléments-objets). Le concept issu de cette abstraction est appelé « nombre ».

### **3. Appariement ou comptage (dénombrement)**

Depuis un demi siècle deux procédures s'opposent dans l'approche conceptuelle du nombre en pédagogie.

#### Appariement (Piaget, Szeminska 1941)

Il reprend la procédure primitive et construit la notion de nombre conformément à l'approche de comparaison des ensembles. Il débouche directement sur la notion de cardinal. Cette procédure permet sans comptage la comparaison de 2 ensembles mais ne fournit pas le nom de leur cardinal.

Cette procédure est proche de la conception mathématique mais ne correspond pas nécessairement à l'acquisition de la notion par l'enfant évoluant dans son milieu naturel.

#### Le comptage

La chaîne de comptage (qui respecte une certaine logique pour la dénomination des nombres) sert de collection témoin. Le comptage fournit une collection de nombres ordinaux (dernier élément nommé). Il débouche indirectement sur le nombre cardinal : le dernier élément nommé étant le n-ième (ordinal) l'ensemble comprend n (cardinal) élément.

Cette façon d'opérer utilise l'acquis de l'enfant dans son milieu familial, assimile une pratique par mémorisation de la chaîne (de l'ordre de la comptine). Cette procédure ne participe guère à la conceptualisation des notions. Elle dépose en mémoire une collection de mots nombres, classés par ordre croissant et contribue à l'illusion de l'existence de nombres naturels (puisque tout ce qui a un nom existe).

Le comptage est une procédure particulière d'appariement. Chaque objet compté est apparié aux mots de la chaîne témoin (la transitivité de l'équipotence fondant alors par deux comptages, la comparaison des cardinaux).

## Numéral ou Numérique ?

Il n'existe pas de convention universelle permettant de distinguer ces deux terminologies.

Numéral :

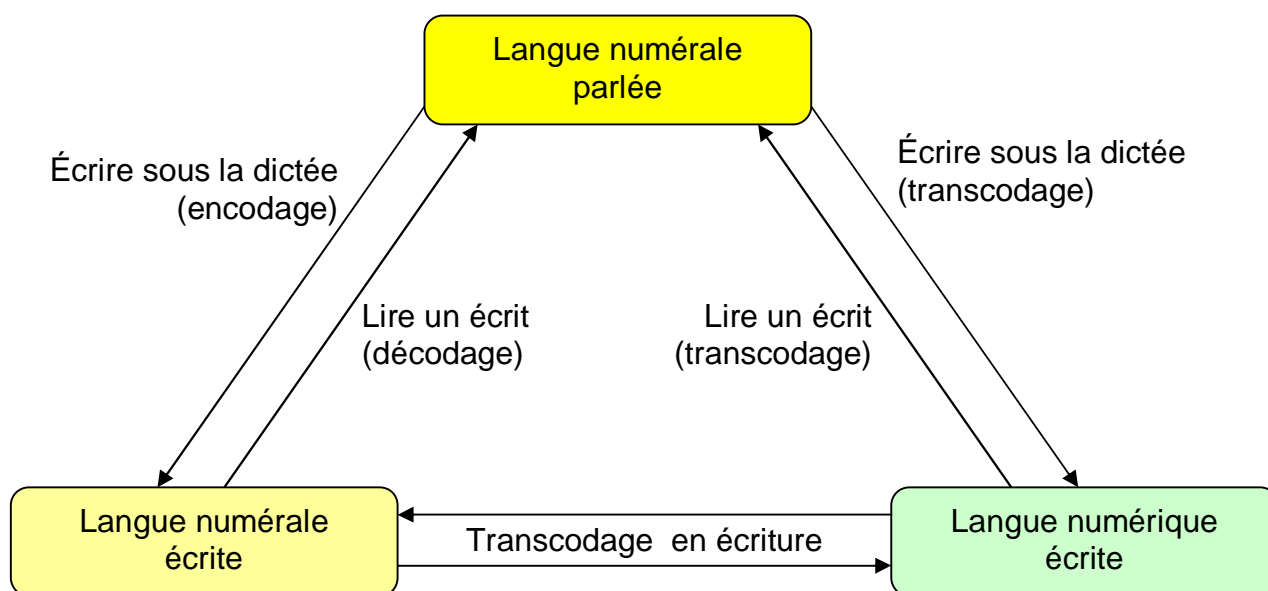
Ce qui est relatif à la **formation des noms de nombres dans la langue parlée ou écrite**. On parlera de « langue numérale » et de « chaîne numérale ».

Numérique :

Ce qui est relatif à la **formation chiffrée des noms des nombres dans une langue écrite arithmétique spécifique**. On parlera de « langue numérique » et de « chaîne numérique ». Les expressions « chaîne chiffrée » ou « chaîne en numération positionnelle » conviennent également.

**Nous disposons de 3 langues pour la désignation d'un nom de nombre :**

- la langue numérale parlée
- la langue numérale écrite *trente-neuf la moitié de*
- La langue numérique écrite  $39$   $\frac{\dots}{2}$



Il résulte donc six types de transformations possibles concrétisables par des exercices d'apprentissage. Ces six transferts constituent les piliers du premier apprentissage de l'arithmétique. Bien des difficultés d'élèves face aux mathématiques résultent de failles liées au déficit de ce type d'apprentissage.

Il résulte donc six types de transformations possibles concrétisables par des exercices d'apprentissage. Ces six transferts constituent les piliers du premier apprentissage de l'arithmétique. Bien des difficultés d'élèves face aux mathématiques résultent de failles liées au déficit de ce type d'apprentissage.

## La chaîne numérale

Le premier instrument d'apprentissage est la chaîne de comptage parlée ou écrite, mémorisée à l'intérieur de la langue naturelle (chaîne numérale). Avec vingt-six mots appartenant à la langue naturelle, on peut construire la chaîne numérale alors qu'il ne faut que dix chiffres pour construire la chaîne numérique (écrite par définition).

### 1. Les numéraux en langue française sont de plusieurs types

cardinaux	Ordinaux	Collectifs	Adverbiaux	Multiples	Fracteurs	préfixes
un	premier		premièrement			mono
deux	deuxième/second	paire	deuxièmement	double	demi	bi / mi
trois	troisième	trio	troisièmement	triple	tiers	tri
quatre	quatrième	quatuor	quatrièmement	quadruple	quart	quadri
cinq	cinquième	quintette	cinquièmement	quintuple	cinquième	penta
six	sixième	sextuor	sixièmement	sextuple	sixième	hexa
sept	septième	septuor	septièmement	septuple	septième	hepta
huit	huitième	octuor	huitièmement	octuple	huitième	octo
neuf	neuvième	neuvaine	neuvièmement	nonuple	neuvième	ennea
dix	dixième	dizaine	dixièmement	décuple	dixième	déca/déci
.....	.....		.....		.....	

**Les cardinaux** : nom de nombre + substantif noyau

En grammaire traditionnelle, les noms donnés aux nombres sont considérés comme « adjectifs numéraux » Ce qui est incorrect. Le nom nombre caractérise l'ensemble et non ses éléments. On devrait parler de « quantifiant »

*Ex : Cinq poules naines* aucune poule n'est elle-même cinq. Chaque poule est bien naine.

Les quantifiants sont invariables (sauf un/une).

L'apparition tardive du zéro rend rare et insolite sont utilisation hors nouveau concept de pub.

*Ex : J'ai écrit zéro poèmes / Je n'ai pas écrit de poème.  
zéro pourcent de matière grasse - zéro blabla zéro tracas, ...*

**Les ordinaux** : article + adjectif ordinal + substantif noyau

L'ordinal est vraiment adjectif puisqu'il caractérise l'élément noyau et non l'ensemble.

*Ex : Le troisième client acheta une cafetière.*

Les ordinaux sont différents des nombres cardinaux puisqu'on ne peut leur appliquer les opérations fondamentales, mais comme une relation d'ordre (=, <, >, ) structure de manière minimale leur ensemble, on conviendra qu'ils sont des nombres (mais ordinaux et rien de plus).

*Ex : Louis XIV + Louis XVI = Louis XXX cela n'a pas de sens. On ne dit pas Louis quatorzième mais bien Louis quatorze...*

## 2. Les irrégularités lexicales et syntaxiques

Ces irrégularités de la langue numérale naturelle sont probablement à l'origine de la plupart des difficultés rencontrées par les enfants.

✚ **entre un et quatre-vingt-dix-neuf** : Cinq types de structuration existent

- 2 structurations lexicales
  - on-**ze**, dou-**ze**, trei-**ze**, quator-**ze**, quin-**ze**, sei-**ze**
  - Tr-**ente**, quar-**ante**, cinqu-**ante**, soix-**ante**
- 3 structurations syntaxiques
  - La concaténation additive : *dix-sept, dix-huit, ...trente et un, ...quarante-cinq,...*
  - La concaténation multiplicative : *quatre-vingts* qui introduit une irrégularité dans la concaténation additive qui continue *quatre-vingt-seize* ( $4 \times 20 + 16$ )
  - Les groupements de structures des noms  
*Par dizaines : de vingt à cinquante-neuf*  
*Par vingtaines : de zéro à dix-neuf, puis de soixante à quatre-vingt-dix-neuf.*

✚ **entre onze cents et mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf** : Deux systèmes co-existent

- un système réintroduisant la vingtaine pour les mots-nombres désignant les centaines  
*Ex : 1789 Dix-sept cent quatre-vingt-neuf 1918 dix-neuf cent dix-huit*
- un système respectant le principe de la numération de position  
*Ex : 1789 mille sept cent quatre-vingt-neuf 1918 mille neuf cent dix-huit*

✚ **au-delà, les noms collectifs** :

Le quantifiant « mille mille » est remplacé par million, « mille millions » par milliards.

## 3. Quelle base positionnelle : cent ou mille ?

Formellement, la chaîne numérale de comptage correspond à une numération de position dans la base mille. La mémorisation des noms pour les mille premiers nombres fournit une construction que l'on peut étendre à l'infini.

Toutefois, la structuration par centaines permet de ramener cette mémorisation à cent noms (d'où la présence du – ou du et dans la concaténation de ces véritables « macro-chiffres » jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf.

## La chaîne numérique

La chaîne numérique (ou chiffrée) est un outil écrit. Elle utilise des signes (chiffres) n'appartenant pas à la langue naturelle et réservés à l'écriture des nombres.

### 1. « Nombre » et « chiffre »

Le mot *chiffre* provient de l'arabe *sifr* signifiant *zéro*.

Le chiffre est un signe indécomposable désignant un nombre (de zéro à neuf). Chaque chiffre a un nom, mais ce nom désigne aussi le nombre représenté. On confond très souvent le nombre « signifié » et le chiffre « signifiant ». Il existe dix chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Ils permettent de former autant de nombres qu'on veut.

Dans ses emplois, le mot chiffre est très souvent mal utilisé : les chiffres du chômage, le chiffre d'affaire, obtenir un chiffre rond, ....

### 2. La numération de position

Dans l'écriture d'un nombre la position donnée à un chiffre est signifiante de l'unité décimale comme puissance de 10. Le chiffre indique alors le nombre d'unités décimales correspondantes.

Si une unité décimale n'est pas utilisée, sa place réservée est théoriquement vide. Comme il serait difficile de lire un nombre avec des trous, on les remplace par des zéros (0). Le zéro prend donc valeur d'absence de chiffre.

L'ordre croissant des unités correspond à une lecture de la droite vers la gauche (sens de lecture des langues arabes ou de l'hébreu à l'inverse de notre langue). Cela crée une difficulté supplémentaire au départ dans la liaison représentation nombre



Pour les nombres naturels, un chiffre 0 est non significatif lorsque tous les chiffres qui le précèdent sont des chiffres 0. En principe, on n'écrit pas les chiffres non significatifs.

On facilite la lecture en découpant l'écriture par des séparateurs. En France, des espaces par tranches de trois chiffres en partant de la droite. La forme numérique dispose les chiffres de manière à faciliter les calculs écrits.

### 3. Les numéros

Bien qu'écrits en chiffres, les numéros ne désignent pas des nombres. Les chiffres ont perdu leur signification sémantique numérique. Ce sont des signes d'identification. Les opérations structurants les nombres ne leur sont plus applicables (ajouter des numéros de téléphone !!!).

La lecture des numéros ne suit pas la même règle que les cardinaux

*Ex : 04 27 39 45 56 un numéro de téléphone est lu par couple de chiffres ou chiffre par chiffre chez les Anglo-Saxons.*

- Les numéros stricts : téléphone, dossards, sécurité sociale (pour partie du numéro)
- Les numéros ordinaux : numéro d'ordre d'arrivée, file d'attente, classement dans une épreuve, les cardinaux postposés qui deviennent ordinaux (Henri III précède Henri IV mais on ne peut ni les additionner, ni les soustraire, ...).

## La structuration de l'ensemble des nombres naturels

### 1. L'abstraction de base

Le nombre naturel résulte de l'abstraction de base de la nature physique de l'objet désigné. Il est quantifiant identique quelque soit l'ensemble concerné

Ex : 7 doigts, 7 poules.

### 2. Le nombre zéro

Si zéro a été inventé tôt comme chiffre, il n'est utilisé comme nombre qu'à partir de la renaissance.

Zéro ne possède aucun associé : ordinal, adverbial, multiple, facteur, collectif, préfixe. Dans la construction du nombre naturel liée au développement, le premier nombre est un et non zéro.

*Ex : il n'existe pas de chapitre 0 dans les livres, ....*

Le zéro a été réintroduit dans les comptes à rebours : *trois, deux, un, zéro.*

Si on ne considère pas le 0 comme un nombre, les structures opératoires perdent leurs généralités :

- il n'y a plus de résultat pour  $x - x$
- l'addition ne possède plus d'élément neutre
- la multiplication ne possède plus d'élément absorbant

### 3. La relation d'identité et la relation d'ordre

Elles structurent tous les cardinaux et les ordinaux.

La relation d'identité se traduit par :

- pour les cardinaux : être égal ( $=$ ) / être différent ( $\neq$ )
- pour les ordinaux : coïncider avec ( $=$ ) / ne pas coïncider avec ( $\neq$ )

La relation d'ordre strict se traduit par :

- pour les cardinaux : être supérieur à ( $>$ ) / être inférieur à ( $<$ )
- pour les ordinaux : précéder ( $>$ ) / suivre ( $<$ )

La relation d'ordre large se traduit par :

- pour les cardinaux : être supérieur ou égal à ( $\geq$ ) / être inférieur ou égal à ( $\leq$ )
- pour les ordinaux : précéder ou coïncider avec ( $\geq$ ) / suivre ou coïncider avec ( $\leq$ )

Les relations ( $=$ ) et ( $\neq$ ) sont symétriques.

Les relations ( $=$ ), ( $>$ ), ( $<$ ), ( $\geq$ ), ( $\leq$ ) sont transitives.



## 4. Les opérations

La relation entre deux nombres (couple) s'appliquant sur l'ensemble initial permet de définir une certaine opération. Les deux nombres formant le couple sont appelés *termes* de l'opération ( *facteurs* pour la multiplication).

### ✚ L'addition (+) $a = b + c$

Ses propriétés structurelles sont :

- la commutativité :  $a + b = b + a$
- l'associativité :  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- l'existence d'un neutre à droite comme à gauche :  $a = a + 0 = 0 + a$

### ✚ La soustraction (-) L'inverse de l'addition, $b = a - c$ ou $c = a - b$ ne donne pas toujours de résultat.

Ses propriétés structurelles sont :

- Elle n'est pas commutative :  $a - b$  n'est pas nécessairement égal à  $b - a$
- Elle n'est pas associative :  $(a - b) - c$  n'est en général pas égal à  $a - (b - c)$   
*Ex :  $(12 - 6) - 2 = 4$      $12 - (6 - 2) = 4$*
- l'existence d'un neutre à droite comme à gauche :  $a = a + 0 = 0 + a$

### ✚ La multiplication (x) ou (.) ou ( ) $a = b \times c$ dérivée de l'addition $a = b + b + b + \dots + b$ (avec c termes)

Ses propriétés structurelles sont :

- la commutativité :  $a \times b = b \times a$
- l'associativité :  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- la distributivité sur l'addition :  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
- l'existence d'un neutre (1) à droite comme à gauche :  $a = a \times 1 = 1 \times a$
- L'existence d'un absorbant (0) à droite comme à gauche :  $a \times 0 = 0 \times a = 0$

### ✚ La division (:) ou (/) ou (÷) $a = b \times c$ inverse de la multiplication, elle ne donne pas toujours de résultat dans les naturels $b = a/c$ $c = a/b$ *Ex : $3/7 = ?$ $3/0 = ?$*

Ses propriétés structurelles sont :

- Elle n'est pas commutative :  $a / b$  n'est pas nécessairement égal à  $b / a$
- Elle n'est pas associative :  $(a / b) / c$  n'est pas nécessairement égal à  $a / (b / c)$   
*Ex :  $(32/4)/2 = 4$      $32/(4/2) = 16$*
- l'existence d'un neutre (1) à droite :  $a = a / 1$

Les propriétés de commutativité et d'associativité permettent d'écrire sans employer de parenthèses :

*Ex :*  $a + b + c =$                        $a \times b \times c =$

Il existe une convention de propriétés accordant la priorité opératoire de la multiplication sur l'addition :

*Ex :*  $a + b \times c =$                        $a + (b \times c) =$                        $7 + 11 \times 3 = 7 + 33 = 40$

Avec les lettres on va jusqu'à remplacer le signe « x » par un « . » ou jusqu'à l'omettre :

*Ex :*  $a + b.c =$                        $a + bc =$

**Ces écritures périlleuses ne sont pas à utiliser en primaire, quitte à alourdir inutilement l'écriture.**